

ZUR KOMPLEX-ANALYTISCHEN BLÄTTERUNG
REELLER QUADRIKEN IM C^n

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Günther Reinelt
aus Hennersdorf

Bochum 1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ZUR KOMPLEX-ANALYTISCHEN BLÄTTERUNG

REELLER QUADRIKEN IM C^n

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Günther Reinelt
aus Hennersdorf

Bochum 1967



Dissertation eingereicht am 26.1.1967

Tag der mündlichen Prüfung: 8.6.1967

Referent: Prof. Dr. Friedrich Sommer

Korreferent: Prof. Dr. Walter Benz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Kapitel 1. Definitionen	
1.1. Grundbegriffe	8
1.2. Darstellung reeller Quadriken des R^{2n} im C^n	10
Kapitel 2. Folgerungen aus der Betrachtung des hermiteschen Anteils	
2.1. Einschränkungen der Blätterungsdimension durch den hermiteschen Anteil	14
2.2. Quadriken vom Typ $H_{p,r-p}$ ($r < n$)	18
2.3. Hermitesche Quadriken	27
2.4. Die komplex-analytischen Hyperflächen unter den Quadriken	29
Kapitel 3. Ein notwendiges Blätterungskriterium und Quadriken mit $Rg \mathcal{V} = 1$ und 2	
3.1. Ein notwendiges Kriterium für die $(n-p)$ -dimensionale Blätterung von Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$	32
3.2. Quadriken mit $Rg \mathcal{V} = 1$	48
3.3. Quadriken mit $Rg \mathcal{V} = 2$	62
Kapitel 4. Kriterien für die lineare Blätterung	
4.1. Zwei hinreichende Kriterien	72
4.2. m -dimensionale Blätterung von Quadriken des C^{2m} mit $Rg \mathcal{V} = 2m$	76
4.3. Reell-geometrische Blätterungsbedingungen	84
Kapitel 5. Bemerkungen zur nicht-linearen Blätterung	91
Literaturverzeichnis	96

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden reelle quadratische Hyperflächen des C^n ($n \geq 2$) auf die Frage hin untersucht, ob sie sich als reell $(2n-2s-1)$ -parametrische Schar komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension s darstellen lassen. Die Problemstellung ist gegenüber der von F. Sommer weitgehend eingeengt. F. Sommer untersuchte nämlich in zwei Arbeiten ([7] und [8]), wann sich eine reelle Mannigfaltigkeit des C^n komplex-analytisch "blättern" läßt, was er mit Hilfe des Kalküls der infinitesimalen Transformationen auf eine Integrabilitätsbedingung von Verteilungen solcher Transformationen zurückführen konnte. Für viermal stetig differenzierbare reelle Hyperflächen

$\varphi(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ konnte er eine Einschränkung

für die Dimension s angeben: $n - \frac{1}{2}(k + |i| + 1) \geq s \geq n - k$;

hierbei ist $k-1$ der Rang der hermiteschen Form $\sum_{\nu, \mu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial \bar{x}_\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$

unter der Nebenbedingung $\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} u_\nu = 0$, i ihr Index,

vorausgesetzt Rang und Index haben in allen nichtsingulären Punkten gleichbleibende Werte. Daß es Hyperflächen des C^n gibt, wo s die Zwischenwerte einschließlich der Grenzen annimmt, sofern diese natürlich ganzzahlig sind, hat F. Sommer in [8] gezeigt. Es sind ins einzelne gehende Untersuchungen notwendig, um die Blätterungsdimension festzulegen.

D. Kahle hat die reellen Hyperflächen 2. Ordnung¹⁾ des C^3 auf ihre komplex-analytische Blätterung in [4] untersucht. Er konnte alle Quadriken des C^3 angeben, die geblättert sind. Dabei konnte er nicht mit dem Kalkül der infinitesimalen Transformationen arbeiten, sondern mußte den direkten Weg gehen unter Verwendung von elementaren Mitteln aus der linearen Algebra.

1) Das Blätterungsverhalten reeller linearer Mannigfaltigkeiten des C^n ist bekannt (s. ([8], 113 f.)).

Um die Hyperflächen 2. Ordnung des C^n ($n \geq 2$) auf ihre Blätterung zu untersuchen, bin ich ebenfalls diesen Weg gegangen. Die Arbeit vermittelt einen gewissen Einblick in die Probleme, die bei der Blätterung solcher Flächen auftauchen, und behandelt bestimmte Klassen von Quadriken hinsichtlich ihres Blätterungsverhaltens vollständig.

In einem ersten Kapitel werden die für die nachfolgenden Untersuchungen benötigten Definitionen gegeben und die Darstellung reeller Quadriken des R^{2n} im C^n behandelt. Dabei wird die Gleichung einer Quadrik weitgehenden Vereinfachungen unterworfen.

Die Gleichung einer Quadrik setzt sich aus einem analytischen, einem antianalytischen und einem hermiteschen Anteil zusammen, wobei der hermitesche Anteil wesentlich das Blätterungsverhalten bestimmt. Dem trägt Kapitel 2 Rechnung. Satz 1 sagt aus, daß eine Quadrik höchstens komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert sein kann, wenn p die Anzahl der positiven Glieder der hermiteschen Form (auf Normalform gebracht) in ihrer Flächengleichung ist. Daher klassifizieren wir die Quadriken nach dem hermiteschen Anteil und nennen eine Quadrik "vom Typ $H_{p,r-p}$ ", wenn r der Rang des hermiteschen Anteils und p die Anzahl der positiven Glieder in seiner Normalform ist. Es zeigt sich, daß Quadriken vom Typ $H_{p,r-p}$ linear geblättert sind, sofern sie eine $(n-p)$ -dimensionale Blätterung aufweisen.

Dann wenden wir uns Quadriken vom Typ $H_{p,r-p}$ mit $r < n$ zu. Ihr Blätterungsverhalten können wir lokal angeben, wenn in der Flächengleichung $r+1$ Variable explizit auftreten. Dies geschieht dadurch, daß wir diese Quadriken lokal biholomorph auf die hermitesche Quadrik

$$y_{r+1} + \bar{y}_{r+1} + \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v = 0$$

abbilden, deren Blätterungsverhalten sich bestimmen läßt. Treten in der Flächengleichung nur r Variable explizit auf, so ist die betreffende Quadrik überall mindestens komplex $(n-r)$ -dimensional linear geblättert. Wir können uns damit

auf Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$ beschränken. Kapitel 2 schließt, indem wir die hermiteschen Quadriken vollständig behandeln und alle analytischen Hyperflächen unter den Quadriken angeben.

In Kapitel 3 geben wir zuerst ein notwendiges Kriterium für die komplex $(n-p)$ -dimensionale Blätterung von Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$. Mit den hierzu nötigen Hilfsbetrachtungen gelingt es, vollständig die Quadriken vom Typ $H_{p,n-p}$ zu behandeln, deren quadratischer analytischer (und antianalytischer) Anteil die Ränge 1 oder 2 hat. Hier zeigt sich, daß die Blätterungsdimension für ein und dieselbe Quadrik keine Konstante zu sein braucht, wenn $n \geq 4$ ist, eine Besonderheit, die bei Quadriken des C^3 nicht auftrat. Auf gewissen Quadriken gibt es nämlich reell $(2n-1)$ -dimensionale Teilgebiete, in denen die Quadrik eine Blätterung aufweist, die von der außerhalb dieser Teilgebiete verschieden ist.

Zwei hinreichende Kriterien für die lineare Blätterung bringt Kapitel 4 zu Anfang. Sodann zeigen wir, daß alle Quadriken des C^{2m} vom Typ $H_{m,m}$, die auf einem offenen Gebiet dieser Flächen komplex m -dimensional geblättert sind, sich auf eine der beiden Normalformen

$$\sum_{v=1}^m (x_v \bar{x}_v - x_{m+v} \bar{x}_{m+v}) = 0 ,$$

$$\sum_{v=1}^m \frac{1}{2} \cdot ((x_v + \bar{x}_v)^2 - (x_{m+v} + \bar{x}_{m+v})^2) = 0$$

komplex-linear transformieren lassen.

Wir beweisen weiter, daß alle reellen Quadriken des C^n , die sich überall als reell $(n-r-1)$ -parametrische Schar ($r \geq 1$) reeller linearer Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $n+r$ darstellen lassen, überall komplex r -dimensional linear geblättert sind. Mit Hilfe dieser Aussage, die sogar allgemein für stetig differenzierbare Hyperflächen des C^n gilt, zeigen wir, daß eine derartige reelle Quadrik des R^{2n} sogar bezüglich jeder beliebigen Vektorraum-Struktur des R^{2n} , die ihn zu einem komplexen Raum macht, komplex r -dimensional geblättert ist. Abschließend beweisen wir die Umkehrung dieses Satzes.

Mit der nicht-linearen Blätterung von reellen Quadriken befassen wir uns nochmals in Kapitel 5. Es zeigt sich, daß nur unter gewissen Bedingungen für die Koeffizienten $a_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\epsilon}$ eine nicht-lineare Mannigfaltigkeit der Form

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \sum_{\epsilon=1}^s \mathcal{Q}_{\epsilon} \left(\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_k) \neq (0, \dots, 0)} a_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\epsilon} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k} \right)$$

Blätterungsmannigfaltigkeit einer Quadrik Q des C^n vom Typ $H_{p, n-p}$ sein kann, wenn diese nicht komplex s -dimensional linear geblättert ist. Dabei ist $k < s \leq n-p$.

Es sei bemerkt, daß bei Literaturhinweisen die in der eckigen Klammer stehende Zahl die Nummer des Buches im Literaturverzeichnis, die zweite Zahl die zugehörige Seite angibt.

Herrn Professor Dr. F. Sommer danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Förderung im Laufe ihrer Entstehung.

Kapitel 1. Definitionen

1.1. Grundbegriffe

Mit C^n bezeichnen wir den n -dimensionalen komplexen linearen Vektorraum der n -Tupel $\varrho = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ komplexer Zahlen. Spalten wir die einzelnen Komponenten des Vektors ϱ in Real- und Imaginärteile auf: $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, so erhalten wir die Darstellung $\varrho = \varrho' + i\varrho''$. ϱ', ϱ'' sind dabei Vektoren des n -dimensionalen reellen linearen Vektorraumes R^n . Wenn nicht anders vermerkt, kennzeichnen ein Strich den Realteil, zwei Striche den Imaginärteil einer komplexen Zahl bzw. eines komplexen Vektors im C^n . Der komplexe Vektorraum C^n bildet bezüglich der Multiplikation mit den reellen Skalaren einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum R_*^{2n} über R , der durch die Zuordnung

$$\varrho = \varrho' + i\varrho'' \rightarrow \begin{pmatrix} \varrho' \\ \varrho'' \end{pmatrix}$$

isomorph zu R^{2n} ist, dem Vektorraum der $2n$ -Tupel reeller Zahlen.

Ist eine reelle stetig differenzierbare Hyperfläche F des R^{2n} lokal durch eine Gleichung $\phi(x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n) = 0$ gegeben, so kann man sie lokal als reelle stetig differenzierbare Fläche im C^n darstellen:

$$(1.1) \quad \psi(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0,$$

indem man in der Ausgangsgleichung x'_ν, x''_ν durch x_ν und $\bar{x}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, ausdrückt. Mit $\bar{x}$ ist dabei stets der zu x konjugiert komplexe Wert bezeichnet. Partielle Ableitungen von ψ nach x_ν bzw. $\bar{x}_\nu$ werden durch die partiellen Differentialoperatoren

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x''_\nu} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\nu} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x''_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

definiert. Läßt sich die Hyperfläche in der Umgebung eines Punktes $\varrho_0 \in F$ lokal durch eine stetig differenzierbare Gleichung $\phi(x_1', \dots, x_n', x_1'', \dots, x_n'') = 0$ darstellen, deren Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1'} , \dots , \frac{\partial \phi}{\partial x_n'} , \frac{\partial \phi}{\partial x_1''} , \dots , \frac{\partial \phi}{\partial x_n''} \right)$$

in ϱ_0 vom Range 1 ist¹⁾, so sagen wir, F ist in ϱ_0 nicht-singulär oder ϱ_0 ist nichtsingulärer Punkt von F .

Eine reelle Hyperfläche F des C^n mit einer Gleichung (1.1) nennen wir in der Umgebung eines nichtsingulären Punktes ϱ_0 in komplex-analytische Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension m geblättert, wenn gilt: Zu $\varrho_0 \in F$ gibt es eine Umgebung U von ϱ_0 und Gebiete $V \subset C^m$, $W \subset R^{2n-2m-1}$, sowie eine injektive stetig differenzierbare Abbildung $g : V \times W \rightarrow C^n$, so daß

$$(1.3) \quad g(V \times W) = U \cap F$$

ist, und die Funktionalmatrix

$$(1.4) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g_v}{\partial z_\mu} & 0 & \frac{\partial g_v}{\partial t_\varphi} \\ 0 & \frac{\partial \bar{g}_v}{\partial \bar{z}_\mu} & \frac{\partial \bar{g}_v}{\partial \bar{t}_\varphi} \end{pmatrix}$$

mit $(z_1, \dots, z_m) \in V$, $(t_1, \dots, t_{2n-2m-1}) \in W$ hat in U den konstanten Rang $2n-1$. Hierbei sind die $g_v, v = 1, 2, \dots, n$, die Komponenten von g .

Eine Hyperfläche F des C^n mit einer definierenden Gleichung (1.1) heißt in einem Gebiet $G \subset F$ in komplex-analytische Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension m geblättert, wenn sie in jedem Punkte $\varrho \in G$ in komplex-analytische Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension m geblättert ist.

Sind insbesondere in (1.3) die g_v linear in den z_μ , so heißt F in ϱ_0 komplex-linear geblättert.

1) d.h. wegen (1.2), daß in ϱ_0 wenigstens ein $\frac{\partial \phi}{\partial x_v}$, $v \in \{1, \dots, n\}$ von Null verschieden ist.

1.2. Darstellung reeller Quadriken des R^{2n} im C^n

Jede Quadrik Q des R^{2n} kann in der Form

$$Q: a + \alpha^{*\tau} \cdot \varrho^* + \varrho^{*\tau} \sigma^* \cdot \varrho^* = 0$$

geschrieben werden. Dabei ist a eine reelle Zahl, α^* ein fester Vektor des R^{2n} , σ^* eine $2n$ -reihige reelle symmetrische Matrix und ϱ^* ein variabler Vektor des R^{2n} . Mit " τ " bezeichnen wir transponierte Vektoren bzw. Matrizen. ϱ^* spalten wir auf in zwei Vektoren ϱ' und ϱ'' des R^n , so daß

$$\varrho^* = \begin{pmatrix} \varrho' \\ \varrho'' \end{pmatrix}$$

ist, d.h. $x'_\nu = x^*_{\nu}$, $x''_\nu = x^*_{n+\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, n^1)$.

Die Gleichung von Q nimmt dadurch die Gestalt an:

$$(1.5) \quad a + (\alpha'^\tau, \alpha''^\tau) \begin{pmatrix} \varrho' \\ \varrho'' \end{pmatrix} + (\varrho'^\tau, \varrho''^\tau) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho' \\ \varrho'' \end{pmatrix} = 0$$

mit

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{pmatrix} = \alpha^* \quad , \quad \alpha', \alpha'' \in R^n \quad ,$$

und $\sigma_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, 2$, sind $(n \times n)$ -Matrizen mit

$$(1.6) \quad \sigma_{11}^\tau = \sigma_{11} \quad , \quad \sigma_{22}^\tau = \sigma_{22} \quad , \quad \sigma_{21}^\tau = \sigma_{12}$$

und

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \sigma^* \quad .$$

- 1) Eine andere Auspaltung von $\varrho^* \in R^{2n}$ in Vektoren ϱ' und ϱ'' des R^n ergibt eine andere komplexe Struktur des R^{2n} (vgl. [7], 113 ff.). Dementsprechend ändert sich das Blätterungsverhalten der Quadrik Q . Kennt man jedoch das Blätterungsverhalten aller Quadriken bezüglich der oben gewählten komplexen Struktur, so ist ihr Blätterungsverhalten bei jeder komplexen Vektorraum-Struktur des R^{2n} bekannt. Ein Wechsel der komplexen Struktur zieht nämlich lediglich eine reelle lineare Transformation des R^{2n} nach sich, die aber Quadriken in Quadriken überführt.

Mit $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + i\mathcal{C}''$ und $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}' - i\mathcal{C}''$ erhält man aus (1.5) die Darstellung von Q im $\mathbb{C}^n$:

$$(1.7) \quad a + \mathcal{X}^T \mathcal{C} + \bar{\mathcal{X}}^T \bar{\mathcal{C}} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} + \bar{\mathcal{C}}^T \bar{\mathcal{C}} + \mathcal{C}^T \mathcal{Y} \bar{\mathcal{C}} = 0,$$

wobei

$$(1.8) \quad \mathcal{X} = \frac{1}{2} (\mathcal{X}' - i \cdot \mathcal{X}'') , \quad \bar{\mathcal{X}} = \frac{1}{2} (\mathcal{X}' + i \cdot \mathcal{X}'') ,$$

$$(1.9) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{4} [(\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{22}) - i(\mathcal{C}_{12} + \mathcal{C}_{21})] ,$$

$$\bar{\mathcal{C}} = \frac{1}{4} [(\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{22}) + i(\mathcal{C}_{12} + \mathcal{C}_{21})] ,$$

$$(1.10) \quad \mathcal{Y} = \frac{1}{2} [(\mathcal{C}_{11} + \mathcal{C}_{22}) + i(\mathcal{C}_{12} - \mathcal{C}_{21})]$$

ist. Wegen (1.6) erhalten wir $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}$ und $\bar{\mathcal{Y}}^T = \mathcal{Y}$. $\mathcal{C}$ ist also eine komplexe symmetrische Matrix, $\mathcal{Y}$ eine hermitesche Matrix.

In (1.7) nennen wir Glieder, in denen kein $\bar{\mathcal{X}}$ auftritt, analytisch, solche ohne $\mathcal{X}$ antianalytisch. Glieder von der Form $c\mathcal{X}_\nu \bar{\mathcal{X}}_\mu$ heißen hermitisch.

Der hermitesche Anteil in der Gleichung (1.7) läßt sich bekanntlich durch eine komplex-lineare Transformation, die analytische Mengen in analytische Mengen überführt und daher am Blätterungsverhalten der Quadrik nichts ändert, auf "Normalform" $w_1 \bar{w}_1 + \dots + w_p \bar{w}_p - w_{p+1} \bar{w}_{p+1} - \dots - w_r \bar{w}_r$ transformieren. Von $\mathcal{Y}$ können wir also ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, es sei bereits von der Form

$$(1.11) \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}^{(p)} & \sigma & \sigma \\ \sigma & -\mathcal{Y}^{(r-p)} & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma^{(n-r)} \end{pmatrix}, \quad 2p \geq r-1,$$

wo $\mathcal{Y}^{(t)}$ die t -reihige Einheitsmatrix ist. $\sigma^{(n-r)}$ ist die $(n-r)$ -reihige Nullmatrix²⁾.

1) Ist $2p < r$, so multipliziere man (1.7) mit -1 .

2) Der Index (s) bei $\mathcal{A}^{(s)}$ soll stets andeuten, daß $\mathcal{A}$ eine $(s \times s)$ -Matrix ist.

Weiter läßt sich durch eine unitäre Matrix eine komplexe symmetrische Matrix auf Diagonalgestalt transformieren ([3], 480). Folglich existiert eine komplex-lineare Transformation $\eta = T\epsilon$ mit

$$T = \begin{pmatrix} T^{(p)} & \sigma & \sigma \\ \sigma & T^{(n-p)} & \sigma \\ \sigma & \sigma & \epsilon^{(n-n)} \end{pmatrix}$$

und $T^{(p)T} \overline{T^{(p)}} = \epsilon^{(p)}$, $T^{(n-p)T} \overline{T^{(n-p)}} = \epsilon^{(n-p)}$, so daß T die Gestalt

$$(1.12) \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(p)} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} \\ \mathcal{R}_{12}^T & \mathcal{D}^{(n-p)} & \mathcal{R}_{23} \\ \mathcal{R}_{13}^T & \mathcal{R}_{23}^T & \mathcal{R}_{33}^{(n-n)} \end{pmatrix}$$

annimmt, wo $\mathcal{D}^{(p)}, \mathcal{D}^{(n-p)}$ p- bzw. (n-p)-reihige Diagonalmatrizen und $\mathcal{R}_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, 2, 3$, komplexe Matrizen sind, deren Zeilen- und Spaltenzahl man aus (1.12) entnimmt. $\mathcal{R}_{33}^{(n-n)}$ ist eine komplexe symmetrische Matrix. Die Transformation $\eta = T\epsilon$ beeinflußt das Blätterungsverhalten der Quadrik Q mit der Gleichung (1.7) nicht, da sie komplex-linear ist. Außerdem läßt sie den auf Normalform gebrachten hermiteschen Anteil der Gleichung (1.7) invariant.

Durch eine geeignete "Drehung" $\eta = \mathcal{D}\epsilon$ im C^n vermöge einer Diagonalmatrix $\mathcal{D}$, deren Diagonalglieder vom Betrage 1 sind, kann man noch erreichen, daß die Diagonalglieder von $\mathcal{D}^{(p)}$ in $\tilde{T}$ sämtlich nicht negativ und die von $\mathcal{D}^{(n-p)}$ nicht positiv sind.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir demnach annehmen, in (1.7) sei $\mathcal{H}$ von der Form $\tilde{\mathcal{H}}$ und $\tilde{T}$ von der Form $\tilde{T}$ mit $\mathcal{D}^{(p)} \geq 0$ und $\mathcal{D}^{(n-p)} \leq 0$ (1). Da im hermiteschen Anteil nun die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_r$ explizit auftreten, kann man durch

1) $\mathcal{D} \geq 0$ bedeutet, daß alle Diagonalglieder von $\mathcal{D}$ nicht negativ sind. Sind alle Diagonalglieder von $\mathcal{D}$ nicht positiv, so schreiben wir $\mathcal{D} \leq 0$.

eine Translation, die am quadratischen Anteil von (1.7) nichts ändert, erreichen, daß in den Lineargliedern nur noch die Variablen $x_{r+1}, \dots, x_n$ vorkommen.

Hat schließlich die hermitesche Matrix $\mathcal{H}$ den Rang n , so kann man mit Hilfe einer "Streckung" $\mathcal{U} = \sqrt{a} \mathcal{U}$ die reelle Konstante a , sofern $a \neq 0$ ist, zu $+1$ oder -1 machen. In diesem Falle geht (1.7) über in

$$(1.13) \quad \mathcal{E} + \mathcal{U}^T \mathcal{U} \mathcal{E} + \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} \bar{\mathcal{E}} + \mathcal{U}^T \mathcal{H} \bar{\mathcal{U}} = 0$$

mit

$$(1.14) \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(p)} & \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^T & \mathcal{U}^{(n-p)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}^{(p)} & \sigma \\ \sigma & -\mathcal{H}^{(n-p)} \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{E} = +1, -1$ oder 0 . Zudem gilt noch $\mathcal{U}^{(p)} \geq 0, \mathcal{U}^{(n-p)} \leq 0$.

Eine Quadrik, deren Flächengleichung keine quadratischen analytischen und antianalytischen Glieder enthält, nennen wir hermitesch.

In den folgenden Ausführungen und Sätzen ist stets vorausgesetzt, auch wenn nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, daß die Gleichungen der betrachteten Quadriken in der eben beschriebenen Weise vereinfacht sind. Außerdem betrachten wir nur nichtsinguläre Punkte auf Quadriken.

Kapitel 2. Folgerungen aus der Betrachtung des hermiteschen Anteils

2.1. Einschränkungen der Blätterungsdimension durch den hermiteschen Anteil

Gegeben sei eine reelle Quadrik Q im C^n durch die Gleichung

$$(2.1) \quad a + \alpha^T \alpha + \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} + \alpha^T \beta \alpha + \bar{\alpha}^T \bar{\beta} \bar{\alpha} + \alpha^T \beta \bar{\alpha} = 0,$$

die bereits gemäß den Ausführungen in 1.2 vereinfacht sei.

Ist diese Quadrik in der Umgebung eines Punktes α_0 komplex k -dimensional geblättert, so existiert eine offene Umgebung $U(\alpha_0)$ auf Q und eine komplexe Mannigfaltigkeit

$$(2.2) \quad \alpha = \alpha_0 + \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_k) \neq (0, \dots, 0)} \beta_{\nu_1 \dots \nu_k} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k},$$

die ganz in $U(\alpha_0)$ verläuft, und unter den $\beta_{\nu_1 \dots \nu_k} \in V_C^n$ ¹⁾ gibt es wenigstens k linear unabhängige Vektoren ²⁾. Für die Dimensionszahl k gilt die Einschränkung $0 \leq k \leq n-1$, da (2.2) eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und auf Q liegt, also von gerader reeller Dimension ist.

Um eine Quadrik (2.1) auf ihr Blätterungsverhalten zu untersuchen, ist es zweckmäßig, von einem Ansatz (2.2) auszugehen. Wir können auf Grund unserer Definition der Blätterung einer Hyperfläche folgende Aussage machen: Gibt es eine Mannigfaltigkeit (2.2), die eine Gleichung (2.1) identisch erfüllt, d.h. auf einer durch (2.1) definierten Quadrik Q liegt, wobei α_0 in einem Gebiet U von Q variiert, die Komponenten der $\beta_{\nu_1 \dots \nu_k}$ stetig differenzierbare Funktionen von α_0 sind und in U mindestens k linear unabhängige

1) Mit V_C^n bezeichnen wir den n -dimensionalen komplexen Vektorraum.

2) Existieren höchstens 1 linear unabhängige Vektoren und ist $1 < k$, so liegt keine k -dimensionale Blätterung vor, da von den 1 linear unabhängigen Vektoren keine k -dimensionale Mannigfaltigkeit aufgespannt werden kann.

unter den Vektoren $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}$ existieren, so ist Q in U k -dimensional komplex-analytisch geblättert, und (2.2) ist die zu $\mathcal{C}_0 \in U$ gehörige Blätterungsmannigfaltigkeit.

Notwendig für die komplex-analytische Blätterung von Q im Punkte $\mathcal{C}_0$ ist daher, daß alle Koeffizienten von $z_1^{q_1} \dots z_k^{q_k}$, $\bar{z}_1^{s_1} \dots \bar{z}_k^{s_k}$ und $z_1^{v_1} \dots z_k^{v_k} \bar{z}_1^{\mu_1} \dots \bar{z}_k^{\mu_k}$ verschwinden, die man durch Einsetzen von (2.2) in (2.1) erhält. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren unter den $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}$ liefert dabei eine obere Schranke für die Blätterungsdimension.

Wir beschränken uns zunächst darauf, daß bei einem Ansatz (2.2) in (2.1) notwendig die Koeffizienten von $z_1^{v_1} \dots z_k^{v_k} \bar{z}_1^{\mu_1} \dots \bar{z}_k^{\mu_k}$ verschwinden. Diese können wir angeben:

$$\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}^T \mathcal{G} \bar{\mathcal{B}}_{\mu_1 \dots \mu_k},$$

was man unter Berücksichtigung von $(v_1, \dots, v_k) \neq (0, \dots, 0)$ sofort nachrechnet.

$\mathcal{G}$ hat die Gestalt (1.11). Die Forderung $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}^T \mathcal{G} \bar{\mathcal{B}}_{\mu_1 \dots \mu_k} = 0$ können wir daher wie folgt umformen: Die $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}$ spalten wir auf in drei Vektoren

$$(2.3) \quad \mathcal{P}_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} b_{1, v_1 \dots v_k} \\ \vdots \\ b_{p, v_1 \dots v_k} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} b_{p+1, v_1 \dots v_k} \\ \vdots \\ b_{n, v_1 \dots v_k} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} b_{n+1, v_1 \dots v_k} \\ \vdots \\ b_{n, v_1 \dots v_k} \end{pmatrix},$$

so daß also

$$\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{v_1 \dots v_k} \\ \mathcal{M}_{v_1 \dots v_k} \\ \mathcal{K}_{v_1 \dots v_k} \end{pmatrix}$$

ist. Es gilt $\mathcal{P}_{v_1 \dots v_k} \in V_C^p$, $\mathcal{M}_{v_1 \dots v_k} \in V_C^{r-p}$ und $\mathcal{K}_{v_1 \dots v_k} \in V_C^{n-r}$, und die umformulierte Bedingung lautet

$$(2.4) \quad \mathcal{P}_{v_1 \dots v_k}^T \bar{\mathcal{P}}_{\mu_1 \dots \mu_k} - \mathcal{M}_{v_1 \dots v_k}^T \bar{\mathcal{M}}_{\mu_1 \dots \mu_k} = 0.$$

Die maximale Anzahl der einer solchen Bedingung genügenden linear unabhängigen Vektoren $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_k}$ ist zu bestimmen. Dazu dient

Hilfssatz 1. Unter allen Vektoren $\mathcal{B}^T = (\mathcal{F}^T, \mathcal{U}^T, \mathcal{K}^T) \in V_C^n$ mit $\mathcal{F} \in V_C^p$, $\mathcal{U} \in V_C^{r-p}$, $\mathcal{K} \in V_C^{n-r}$ ($2p \geq r$, $p \leq r \leq n$) gibt es genau $n-p$ linear unabhängige, die der Bedingung

$$(2.5) \quad \mathcal{F}_v^T \bar{\mathcal{F}}_\mu - \mathcal{U}_v^T \bar{\mathcal{U}}_\mu = 0$$

genügen, wobei durch die Indizes v und μ irgend zwei Vektoren des V_C^n gekennzeichnet sind, die nicht notwendig voneinander verschieden zu sein brauchen¹⁾.

Beweis: Es existieren zunächst $n-p$ linear unabhängige Vektoren des V_C^n , die paarweise die Bedingung (2.5) erfüllen. Dazu wähle man etwa:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v^{(p)} \\ \mathcal{U}_v = \mathcal{U}_v^{(n-p)} \\ \mathcal{K}_v = \mathcal{U} \end{array} \right\}, v = 1, \dots, r-p, \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{F}_v = \mathcal{U} \\ \mathcal{U}_v = \mathcal{U} \\ \mathcal{K}_v = \mathcal{U}_{v-n+p}^{(n-p)} \end{array} \right\}, v = r-p+1, \dots, n-p.$$

$\mathcal{U}_v^{(k)}$ ist dabei ein Vektor des V_C^k , der an der v -ten Stelle eine 1, sonst jedoch nur Nullen aufweist. Man sieht sofort, daß die $\mathcal{B}_v$, $v = 1, 2, \dots, n-p$ die Gleichungen $\mathcal{F}_v^T \bar{\mathcal{F}}_\mu - \mathcal{U}_v^T \bar{\mathcal{U}}_\mu = 0$ erfüllen und linear unabhängig sind.

Angenommen, es existieren $n-p+1$ linear unabhängige Vektoren $\mathcal{B}_v$, $v = 1, 2, \dots, n-p+1$, die paarweise (2.5) genügten. Man überzeugt sich sofort, daß mit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ auch beliebige Linearkombinationen der $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ (2.5) erfüllen. Also ist Bedingung (2.5) gegenüber Orthogonalisierung und Normierung von ihr genügenden Vektoren invariant. Wir können daher voraussetzen, daß die $n-p+1$ linear unabhängigen Vektoren orthogonal und von der Länge 1 sind. Es gilt somit

$$(2.6) \quad \mathcal{F}_v^T \bar{\mathcal{F}}_\mu + \mathcal{U}_v^T \bar{\mathcal{U}}_\mu + \mathcal{K}_v^T \bar{\mathcal{K}}_\mu = \delta_{v\mu}, v, \mu = 1, 2, \dots, n-p+1,$$

wo $\delta_{v\mu}$ das Kroneckersymbol ist. Zusätzlich gilt

$$(2.7) \quad \mathcal{F}_v^T \bar{\mathcal{F}}_\mu - \mathcal{U}_v^T \bar{\mathcal{U}}_\mu = 0, v, \mu = 1, 2, \dots, n-p+1.$$

1) Wir sagen dazu im folgenden: Die Vektoren $\mathcal{B} \in V_C^n$ genügen "paarweise" der Gleichung $\mathcal{F}^T \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{U}^T \bar{\mathcal{U}} = 0$.

Subtrahieren wir (2.7) von (2.6), so folgt

$$(2.8) \quad 2\alpha_v^T \bar{\alpha}_\mu + \alpha_v^T \bar{\alpha}_\mu = \delta_{v\mu}, \quad v, \mu = 1, 2, \dots, n-p+1.$$

Das heißt aber, die Vektoren $\left(\frac{\alpha_v^T}{\alpha_v}\right) \in V_C^{n-p}$, $v = 1, 2, \dots, n-p+1$, sind linear unabhängig. Das ist aber ein Widerspruch, da im V_C^{n-p} maximal $n-p$ linear unabhängige Vektoren existieren.

Damit erhalten wir: Es gibt maximal $n-p$ linear unabhängige Vektoren unter den $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, die (2.4) genügen. Ohne Berücksichtigung der übrigen Bedingungen gilt demnach

Satz 1. Gegeben sei eine reelle Quadrik Q im C^n mit der

$$\text{Gleichung} \quad a + \alpha^T \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} + \alpha^T \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} + \alpha^T \bar{\alpha} = 0,$$

und die Normalform der hermiteschen Matrix $\mathcal{H}_j$ besitze genau p positive Diagonalglieder. Dann ist Q in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte höchstens $(n-p)$ -dimensional komplex-analytisch geblättert. Ist insbesondere die Matrix $\mathcal{H}_j$ positiv definit, so ist Q nirgends geblättert.

Satz 1 sagt aus, daß das Blätterungsverhalten einer Quadrik wesentlich durch die hermitesche Form $\alpha^T \mathcal{H}_j \bar{\alpha}$ in ihrer Flächengleichung bestimmt wird. Wir sagen daher, eine reelle Quadrik des C^n sei vom Typ $H_{p,q}$, wenn die hermitesche Form $\alpha^T \mathcal{H}_j \bar{\alpha}$, auf Normalform gebracht, p positive und q negative Glieder aufweist. Addiert man beide Indizes, so erhält man den Rang der hermiteschen Form $\alpha^T \mathcal{H}_j \bar{\alpha}$. Wir setzen stets $p \geq q$ voraus.

Aus Satz 1 folgt noch die bekannte Tatsache, daß Hyperkugeln des C^n nicht geblättert sind.

Ist eine Quadrik in der Umgebung eines nichtsingulären Punktes α_0 komplex k -dimensional geblättert, so folgt aus der Darstellung (2.2) und wegen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V_C^n$, daß man eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \leq s < n$, wählen kann, so daß

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k = \sum_{s=1}^k t_s \alpha_1, \dots, \alpha_k \alpha_s$$

gilt. Dadurch erhält die Blätterungsmannigfaltigkeit (2.2) folgendes Aussehen:

$$(2.9) \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \sum_{\delta=1}^s \left(\mathcal{B}_{\delta} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_k) \neq (0, \dots, 0)} t_{\nu_1 \dots \nu_k} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k} \right) .$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung der Null stellen die Potenzreihen $\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_k) \neq (0, \dots, 0)} t_{\nu_1 \dots \nu_k} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k}$ holomorphe Funktionen $f_{\delta}(z_1, \dots, z_k)$, $\delta = 1, 2, \dots, s$, dar. Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen kann man unter der nicht einschränkenden Voraussetzung, daß die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial f_{\delta}}{\partial z_{\epsilon}} \right)_{\delta, \epsilon=1, \dots, k}$ den Rang k hat, die Funktionen f_{δ} , $\delta = 1, 2, \dots, k$, in einer Umgebung der Null invertieren ([2], 17) und erhält:

$$\begin{aligned} f_{\delta}(z_1, \dots, z_k) &= w_{\delta} \quad , \quad \delta = 1, 2, \dots, k \quad , \\ f_{\delta}(z_1, \dots, z_k) &= g_{\delta}(w_1, \dots, w_k) \quad , \quad \delta = k+1, k+2, \dots, s \quad . \end{aligned}$$

Damit schreiben wir statt (2.9):

$$(2.10) \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \sum_{\delta=1}^k \mathcal{B}_{\delta} w_{\delta} + \sum_{\delta=k+1}^s \mathcal{B}_{\delta} g_{\delta}(w_1, \dots, w_k) .$$

Ist $k = s$, so ist die Blätterungsmannigfaltigkeit linear.

Da bei einer Quadrik vom Typ $H_{p, r-p}$, wo r der Rang der hermiteschen Form $\mathcal{U}^T \mathcal{B} \mathcal{U}$ ist, höchstens $n-p$ unter den Vektoren $\mathcal{B}_{\nu_1 \dots \nu_k}$ in (2.2) linear unabhängig sind, haben wir

Satz 2. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 und unter der Voraussetzung, daß die Quadrik Q in der Umgebung eines Punktes $\mathcal{U}_0$ komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert ist, folgt: Q ist in der Umgebung von $\mathcal{U}_0$ $(n-p)$ -dimensional komplex-linear geblättert.

Damit sind Quadriken vom Typ $H_{n-1, 1}$, sofern sie überhaupt geblättert sind, linear geblättert (vgl. [4], 35).

2.2. Quadriken vom Typ $H_{p, r-p}$ ($r < n$)

Im folgenden bezeichnen wir mit $\varphi(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ die gemäß 1.2 vereinfachte Gleichung (2.1) einer reellen Quadrik Q des C^n . Ferner führen wir die Abkürzungen ein:

$$\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_v}, \quad \varphi_{\bar{v}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_v}, \quad \varphi_{v\mu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_v \partial x_\mu}, \quad \varphi_{\bar{v}\bar{\mu}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}_v \partial \bar{x}_\mu}, \quad \varphi_{v\bar{\mu}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_v \partial \bar{x}_\mu}.$$

Es sei $\text{Rg } \varphi_v = r < n$ in einer vollen Flächenumgebung eines Flächenpunktes ϱ_0 . Wir setzen voraus, daß ein $v_0, v_0 \in \{r+1, \dots, n\}$, existiert, so daß φ_{v_0} auf Q nicht identisch verschwindet, und in ϱ_0 sei $\varphi_{v_0} \neq 0$. Auf Grund der Stetigkeit von φ_{v_0} gilt dies dann in einer ganzen Flächenumgebung von ϱ_0 . Durch Ummumerierung der Variablen $x_{r+1}, \dots, x_n$ kann man erreichen, daß φ_{n+1} in $U(\varrho_0)$ von Null verschieden ist. Solche Ummumerierungen sind komplex-lineare Transformationen, beeinflussen das Blätterungsverhalten also nicht.

Die holomorphe Abbildung

$$(2.11) \quad \begin{aligned} y_v &= x_v, \quad v = 1, 2, \dots, r, r+2, r+3, \dots, n \\ \bar{y}_{n+1} &= \frac{a}{2} + \sum_{v=r+1}^n a_v x_v + \sum_{v,\mu=r+1}^n s_{v\mu} x_v x_\mu = \frac{a}{2} + \bar{u}^T \bar{x} + \bar{x}^T \bar{s} \bar{x} \end{aligned}$$

führt die Quadrik mit der Gleichung (2.1) über in

$$(2.12) \quad Q_0: y_{r+1} + \bar{y}_{r+1} + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0.$$

Auf Grund der Voraussetzung ist $\varphi_{n+1} = a_{r+1} + 2 \sum_{v=1}^n s_{v,n+1} x_v \neq 0$ in $U(\varrho_0)$. Daher ist die Determinante der Funktionalmatrix

$\left(\frac{\partial y_v}{\partial x_\mu} \right)$, deren Wert φ_{n+1} ist, dort von Null verschieden. Die holomorphe Abbildung (2.11) ist also in $U(\varrho_0)$ umkehrbar. Ist φ_{n+1} auf Q nicht identisch Null, so bilden die Punkte mit $\varphi_{n+1} = 0$ auf Q eine höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wie man unmittelbar erkennt. Damit gilt

Satz 3. Bis auf höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionale Untermengen sind die reellen Quadriken des C^n , die vom Typ $H_{p,r-p}$ ($r \leq n-1, 2p \geq r$) sind und auf denen φ_{v_0} nicht identisch verschwindet für wenigstens ein $v_0 \in \{r+1, \dots, n\}$, lokal bi-holomorph äquivalent zu der hermiteschen Quadrik Q_0 mit der Gleichung

$$y_{r+1} + \bar{y}_{r+1} + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0.$$

Kennt man demnach das Blätterungsverhalten der Quadrik Q_0 , so kann man auf das Blätterungsverhalten von Quadriken Q schließen, die die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllen. Wir untersuchen im folgenden die Quadrik Q_0 , wobei man stets $p \geq 1$ voraussetzen kann.

Nach Satz 1 kann Q_0 in der Umgebung $U(\eta_0)$ eines jeden Flächenpunktes η_0 höchstens komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert sein. Tritt dieser Fall ein, so ist nach Satz 2 die Blättermannigfaltigkeit linear.

Macht man nun den Ansatz einer $(n-p)$ -dimensionalen komplex-linearen Blätterung in $\tilde{\eta} \in U(\eta_0)$:

$$\eta = \tilde{\eta} + \sum_{v=1}^{n-p} \mathcal{E}_v \omega_v, \quad ,$$

so erhält man aus (2.12) die folgenden Bedingungsgleichungen für die Vektoren $\mathcal{E}_v$, wenn man die $\mathcal{E}_v$ gemäß (2.3) aufspaltet und

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_p \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{p+1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{pmatrix}$$

ist:

$$\text{I. } \tilde{\eta} \in Q_0.$$

$$(2.13) \quad \text{II. } b_{n+1,v} + \tilde{\eta}_1^T \mathcal{E}_v - \tilde{\eta}_2^T \mathcal{E}_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-p,$$

$$\text{III. } \mathcal{E}_v^T \mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\mu^T \mathcal{E}_v = 0, \quad v, \mu = 1, 2, \dots, n-p.$$

Dazu kommt noch die zu II konjugiert komplexe Gleichung, die jedoch weggelassen werden kann. Nach den Ausführungen in 2.1 ist Q_0 in $U(\eta_0)$ genau dann kompl x-linear $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn für alle $\tilde{\eta} \in U(\eta_0)$ diese Gleichungen durch $n-p$ linear unabhängige Vektoren $\mathcal{E}_v$ befriedigt werden.

Die Gleichungen (2.13) lassen sich jedoch für kein $\tilde{\eta} \in U(\eta_0)$ durch n-p linear unabhängige Vektoren lösen. Wegen (2.13) II :

$$b_{r+1,v} = -\tilde{\eta}_1^T \eta_v + \tilde{\eta}_2^T \eta_v, \quad v = 1, 2, \dots, n-p,$$

gilt nämlich: Sind die n-p Vektoren $\hat{\eta}_v \in V_C^{n-1}$, die aus den Vektoren $\eta_v \in V_C^n$ durch Weglassen der (r+1)-ten Komponente entstehen, linear unabhängig, so gilt dasselbe auch für die Vektoren η_v , $v = 1, 2, \dots, n-p$. Die Umkehrung, daß mit den η_v die $\hat{\eta}_v$ linear unabhängig sind, ist trivial. Gäbe es nun n-p linear unabhängige Vektoren $\hat{\eta}_v \in V_C^{n-1}$, so ergäbe sich auf Grund von Gleichung III ein Widerspruch zu Hilfssatz 1.

Eine mögliche Blätterungsmannigfaltigkeit von Q_0 hat also höchstens die Dimension n-p-1. Wir zeigen: Q_0 ist überall (n-p-1)-dimensional komplex-linear geblättert.

Eine einfache Rechnung ergibt, daß die komplex-lineare Mannigfaltigkeit

$$(2.14) \quad \eta = \eta_0 + \sum_{v=1}^{n-p} \begin{pmatrix} \eta_v^{(p)} \\ \eta_v^{(n-p)} \\ 1 \end{pmatrix} \omega_v + \sum_{v=2}^{n-r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \eta_v^{(n-r)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \eta_1^{(n-r)} \end{pmatrix} \sum_{v=1}^{n-p} (\tilde{\eta}_{20}^T \eta_v^{(n-p)} - \tilde{\eta}_{10}^T \eta_v^{(p)}) \omega_v$$

für alle $\eta_0 \in Q_0$ auf Q_0 liegt. Die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren unter den

$$\begin{pmatrix} \eta_v^{(p)} \\ \eta_v^{(n-p)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = 1, 2, \dots, n-p, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \eta_v^{(n-r)} \end{pmatrix}, \quad v = 1, 2, \dots, n-r,$$

ist n-p, die Anzahl der auftretenden Variablen ω_v n-p-1. Also hat die Mannigfaltigkeit (2.14) die komplexe Dimension n-p-1.

Da die $(p+v)$ te Komponente des Vektors $\begin{pmatrix} \eta_1^{(p)} \\ \vdots \\ \eta_v^{(n-p)} \\ \vdots \end{pmatrix}$ für $v = 1, 2, \dots, r-p$ und ebenso die $(r+v)$ te Komponente des Vektors $\begin{pmatrix} \eta_1^{(p)} \\ \vdots \\ \eta_v^{(n-p)} \\ \vdots \end{pmatrix}$ für $v = 2, 3, \dots, n-r$ von Null verschieden sind, hat die Mannigfaltigkeit (2.14) für jedes η_0 genau einen Punkt η^* mit der durch $y_{p+1}^* = y_{p+2}^* = \dots = y_r^* = y_{r+2}^* = y_{r+3}^* = \dots = y_n^* = 0$, $y_{r+1}^* + \bar{y}_{r+1}^* + y_1^* \bar{y}_1^* + \dots + y_p^* \bar{y}_p^* = 0$ gegebenen Untermannigfaltigkeit von Q_0 gemeinsam. Man erhält deshalb, sofern man in (2.14) den Punkt η_0 alle Punkte η^* dieser $(2p+1)$ -dimensionalen reellen Untermannigfaltigkeit durchlaufen läßt, jede komplexe Mannigfaltigkeit (2.14) in der Gestalt

$$(2.15) \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1^* + w_1 \\ \vdots \\ y_{r-p}^* + w_{r-p} \\ y_{r-p+1}^* \\ \vdots \\ y_p^* \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{r-p} \\ y_{r+1}^* - \sum_{v=1}^{n-p} \bar{y}_v^* w_v \\ w_{r-p+1} \\ \vdots \\ w_{n-p-1} \end{pmatrix}$$

mit $y_{r+1}^* + \bar{y}_{r+1}^* + y_1^* \bar{y}_1^* + \dots + y_p^* \bar{y}_p^* = 0$, und durch jeden Punkt von Q_0 geht genau eine komplexe Mannigfaltigkeit (2.15). Damit ist (2.15) bei variablen reellen Parametern $y_1^*, y_1'', \dots, y_p^*, y_p'', y_{r+1}^*$ und variablen komplexen Parametern $w_1, w_2, \dots, w_{n-p-1}$ eine stetig differenzierbare Darstellung von Q_0 von der Form (1.3). y_{r+1}^* in (2.15) berechnet sich aus der zu (2.15) gehörenden Bedingung zu

$$(2.16) \quad y_{r+1}^* = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^p (y_v^{*'}^2 + y_v^{*''}{}^2) .$$

Die Funktionalmatrix (1.4) von (2.15) hat offensichtlich auf der ganzen Fläche Q_0 den Rang $2n-1$, da sich das Gleichungssystem (2.15) unter der Nebenbedingung (2.16) überall stetig differenzierbar nach den auf der rechten Seite auftretenden komplexen und reellen Parametern auflösen läßt. Damit ist die quadratische reelle Hyperfläche Q_0 mit der Gleichung (2.12) überall komplex-linear $(n-p-1)$ -dimensional geblättert.

Es läßt sich ohne weiteres zeigen, daß auch alle komplex-analytischen Flächen von der Gestalt (2.14) auf der Quadrik Q_0 liegen, in denen $\kappa_v^{(p)}$ bzw. $\kappa_v^{(n-p)}$ durch Vektoren φ_v bzw. ψ_v ersetzt sind, die nur der Bedingung

$$(2.17) \quad \varphi_v^T \bar{\varphi}_\mu - \psi_v^T \bar{\psi}_\mu = 0, \quad v, \mu = 1, 2, \dots, r-p,$$

genügen und die, zu Vektoren der Gestalt $\begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix}$ zusammengefaßt, linear unabhängig sind. Außerdem können die Vektoren $\kappa_v^{(n-r)}$, $v = 2, 3, \dots, n-r$, in (2.14) durch $n-r-1$ beliebige linear unabhängige Vektoren κ_v ersetzt werden, wobei die erste Komponente der κ_v jeweils Null ist. Unter diesen Abänderungen nimmt (2.14) die Gestalt an:

$$(2.18) \quad \eta = \eta_0 + \sum_{v=1}^{r-p} \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \\ \kappa_v \end{pmatrix} \omega_v + \sum_{v=2}^{n-r} \begin{pmatrix} \kappa_v \\ \psi_v \\ \kappa_v \end{pmatrix} \omega_{v+r-p-1} + \begin{pmatrix} \kappa_v \\ \psi_v \\ \kappa_v \end{pmatrix} \sum_{v=1}^{n-p} (\bar{\eta}_{20}^T \psi_v - \bar{\eta}_{10}^T \varphi_v) \omega_v.$$

Wir zeigen noch: Alle komplexen Flächen von der komplexen Dimension $n-p-1$, die Blätterungsmannigfaltigkeiten von Q_0 sind, sind bis auf die Ausnahmepunkte einer höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von Q_0 linear.

Damit eine Blätterungsmannigfaltigkeit (2.2) auf der Quadrik Q_0 in einer Flächenumgebung $U(\eta_0)$ des Punktes η_0 die angegebene Dimension haben kann, ist nach dem Beweis zu Satz 1 notwendig, daß die Anzahl der Variablen w_v $n-p-1$ ist

und daß mindestens $n-p-1$ linear unabhängige Vektoren unter den $\mathcal{B}_{v_1 \dots v_n}$ in $U(\eta_0)$ existieren. Andererseits wurde in 2.1 gezeigt, daß es auf einer Quadrik Q vom Typ $H_{p, r-p}$ höchstens $n-p$ linear unabhängige Vektoren gibt. Die allgemeinste komplexe Mannigfaltigkeit, die den genannten Bedingungen Rechnung trägt, ist nach den Ausführungen im Anschluß an Satz 1 die folgende:

$$(2.19) \quad \eta = \tilde{\eta} + \sum_{v=1}^{n-p-1} \mathcal{B}_v w_v + \mathcal{B}_{n-p} \sum_{(v_1, \dots, v_{n-p-1}) \neq (0, \dots, 0)} a_{v_1 \dots v_{n-p-1}} w_1^{v_1} \dots w_{n-p-1}^{v_{n-p-1}}$$

(2.19) ist nach den Ausführungen in 2.1 genau dann Blättermannigfaltigkeit von Q_0 in η_0 , wenn (2.19) für alle $\tilde{\eta}$ einer hinreichend kleinen Umgebung von η_0 die Gleichung (2.12) identisch erfüllt und die $\mathcal{B}_v$ und $a_{v_1 \dots v_{n-p-1}}$ stetig differenzierbar von $\tilde{\eta}$ abhängen. Beachtet man nur, daß die Koeffizienten von $w_1^{v_1} \dots w_{n-p-1}^{v_{n-p-1}}$ identisch verschwinden müssen, so erhält man daraus die Gleichungen

$$(b_{r+1, n-p} + \tilde{\eta}_1^T \tilde{f}_{n-p} - \tilde{\eta}_2^T \tilde{v}_{n-p}) a_{v_1 \dots v_{n-p-1}} = 0$$

für $(v_1, \dots, v_{n-p-1}) \neq (1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. $\tilde{\eta}$ ist wieder wie in (2.13) aufgespalten. Aus diesen Gleichungen folgt aber bis auf Punkte des Durchschnitts von

$$(2.20) \quad F_0: \tilde{b}_{r+1, n-p} + \tilde{\eta}_1^T \tilde{f}_{n-p} - \tilde{\eta}_2^T \tilde{v}_{n-p} = 0$$

mit $Q_0: a_{v_1 \dots v_{n-p-1}} = 0$. Das bedeutet genau die Linearität von (2.19). Daß der Durchschnitt von Q_0 mit F_0 höchstens $(2n-2)$ -dimensional ist, folgt aus der Unzerlegbarkeit der Quadrik Q_0 in zwei reelle Hyperflächen, was man aus der Gleichung von Q_0 (2.12) direkt erkennt.

Statt (2.19) erhalten wir demnach im Punkte η_0 :

$$\eta = \eta_0 + \sum_{v=1}^{n-p-1} \mathcal{B}_v w_v + \mathcal{B}_{n-p} \sum_{v=1}^{n-p-1} a_v w_v = \eta_0 + \sum_{v=1}^{n-p-1} (\mathcal{B}_v + a_v \mathcal{B}_{n-p}) w_v$$

oder

$$(2.21) \quad \eta = \eta_0 + \sum_{v=1}^{n-p-1} \mathcal{B}_v^* w_v$$

mit $\mathcal{B}_v^* = \mathcal{B}_v + a_v \mathcal{B}_{n-p}$, was unsere Behauptung beweist.

Die Quadrik Q_0 ist nunmehr in allen ihren Punkten $(n-p-1)$ -dimensional geblättert, wenn (2.21) die Gleichung (2.12) identisch erfüllt für alle $\eta_0 \in Q_0$. Dies ergibt ein Gleichungssystem (2.13), in dem die $\mathfrak{R}_v$ durch Vektoren $\mathfrak{R}_v^*$ ersetzt sind und v von 1 bis $n-p-1$ läuft. Die allgemeinste Lösung dieses Systems ist die Mannigfaltigkeit (2.18), wie man unschwer erkennt.

Die Blätterungsvektoren von (2.18) sind durch die zugehörigen Nebenbedingungen nicht eindeutig bestimmt. Es bleiben noch gewisse reelle Parameter frei wählbar. Ihre Anzahl wollen wir nun bestimmen.

Sämtliche Blätterungsvektoren von (2.18) sind nur bis auf komplexe Vielfache bestimmt. Daher ist die Zahl der unbekannten komplexen Komponenten der Blätterungsvektoren in der Darstellung (2.18) $(r-1)(r-p)$. (Man beachte, daß die π_v infolge ihrer linearen Unabhängigkeit durch Einführung geeigneter komplexer Variablen $w_{v+r-p-1}^*$, $v = 2, \dots, n-r$, in $\mathfrak{R}_v^{(v-r)}$ übergehen und in diesem Sinne eindeutig bestimmt sind). Wir haben somit $2(r-1)(r-p)$ reelle Parameter, von denen durch die Nebenbedingung (2.17) noch $(r-p)^2$ festgelegt werden. Es verbleiben also $(r-p)(r+p-2)$ reelle Parameter, über die frei verfügt werden kann. Nur für $r = p$ sind die Blätterungsvektoren eindeutig.

Ist $r > p$, so ist für jeden festen Wert jedes dieser Parameter (2.18) Blätterungsmannigfaltigkeit von Q_0 im Punkte η_0 . Es erhebt sich nun die Frage, ob man alle Blätterungsmannigfaltigkeiten von Q_0 in η_0 erhält, indem man für die reellen Parameter konstante Werte einsetzt. Die Antwort ist nein. In diesem Zusammenhang sei auf die Untersuchungen von D. Kahle in [4] hingewiesen, der im Falle des C^3 gezeigt hat, daß es auf offenen Mengen von Q_0 : $y_3 + \bar{y}_3 + y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2 = 0$ komplexe Blätterungen gibt, für welche der freie Parameter eine stetig differenzierbare Funktion von η ist ([4], 18). Damit gilt:

Satz 4. Die reelle Quadrik Q_0 des C^n mit der Gleichung

$$y_{r+1} + \bar{y}_{r+1} + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0, \quad 2p \geq r,$$

ist in allen ihren Punkten maximal komplex $(n-p-1)$ -dimensional linear geblättert. Die Blätterungsmannigfaltigkeit in einem Flächenpunkt η_0 ist für $r > p$ nicht eindeutig bestimmt. Bis auf die Ausnahmepunkte einer höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von Q_0 ist jede komplex $(n-p-1)$ -dimensionale Blätterungsmannigfaltigkeit auf Q_0 linear.

Berücksichtigen wir noch Satz 3, so können wir mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes das Blätterungsverhalten einer großen Klasse von Quadriken angeben. Es gilt nämlich:

Satz 4a. Bis auf höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionale Untermengen sind die reellen Quadriken Q des C^n vom Typ $H_{p,r-p}$ mit $r \leq n-1$, auf denen φ_v nicht identisch verschwindet für wenigstens ein $v \in \{r+1, \dots, n\}$, lokal komplex $(n-p-1)$ -dimensional geblättert; die angegebene Blätterungsdimension ist maximal.

Beim Übergang von Q_0 zur Quadrik des Typs $H_{p,r-p}$ bleibt im allgemeinen die Linearität der Blätterungsmannigfaltigkeit nicht erhalten. Die Linearität bleibt nur bestehen, wenn die Gleichung der Quadrik Q keine quadratischen analytischen und antianalytischen Glieder besitzt, Q also eine hermitesche Quadrik ist.

Außer den Quadriken mit $Rg \mathcal{H} = n$ sind somit noch diejenigen mit $Rg \mathcal{H} = r < n$ zu untersuchen, für die φ_v identisch Null ist für $v = r+1, \dots, n$. Ihre Gleichungen sind von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r) = 0, \quad r < n.$$

Jede solche Quadrik Q ist in allen ihren Punkten mindestens komplex $(n-r)$ -dimensional linear geblättert. Denn man erkennt sofort, daß die lineare komplexe Mannigfaltigkeit des C^n

$$e = e_0 + \sum_{v=1}^{n-r} \begin{pmatrix} x \\ z_v^{(n-r)} \end{pmatrix} z_v$$

für alle $e_0 \in Q$ auf $\varphi(x_1, \dots, x_r, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) = 0$ liegt. Man hat also

Satz 5. Gegeben sei eine reelle Quadrik Q des C^n vom Typ $H_{p,r-p}$ mit $r \leq n-1$, und es sei φ_v identisch Null für $v = r+1, \dots, n$. Dann ist Q überall mindestens komplex $(n-r)$ -dimensional linear geblättert.

Dieser Satz zusammen mit Satz 4a läßt eine bemerkenswerte Folgerung zu: Man hat nur noch Quadriken des C^n mit $Rg \mathcal{Q} = n$ zu untersuchen. Kennt man nämlich das Blätterungsverhalten von Quadriken des C^r mit $Rg \mathcal{Q} = r$, so kennt man ihr Blätterungsverhalten im C^n ($n \geq r$). Die Blätterungsmannigfaltigkeit der Quadrik Q im C^n (geschrieben $Q^{(n)}$) ist nämlich gleich dem Produkt der Blätterungsmannigfaltigkeit von Q im C^r ($Q^{(r)}$) mit dem komplexen linearen Vektorraum V_C^{n-r} . Für die Dimensionen gilt: Blätterungsdimension von $Q^{(n)}$ gleich Blätterungsdimension von $Q^{(r)}$ plus $n-r$.

2.3. Hermiteische Quadriken

Nach den Vereinfachungen der Gleichung einer Quadrik Q gemäß 1.2 lautet die allgemeinste Gleichung einer hermiteschen Quadrik

$$\varepsilon + \sum_{v=r+1}^n (a_v y_v + \bar{a}_v \bar{y}_v) + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0$$

mit $\varepsilon = 0, +1$ oder -1 , $2p \geq r$ und $r \leq n$. Ist wenigstens ein a_v , $v \in \{r+1, \dots, n\}$ von Null verschieden, so ist nach Satz 4a das Blätterungsverhalten der hermiteschen Quadrik bekannt. Seien also alle $a_v = 0$. Wir haben dann nur noch die hermitesche Quadrik

$$(2.22) \quad \varepsilon + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0$$

auf ihr Blätterungsverhalten im C^n zu untersuchen.

Wir zeigen zunächst: (2.22) ist komplex-projektiv äquivalent zu der quadratischen Fläche des C^n

$$(2.23) \quad x_r + \bar{x}_r + x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_{p-1} \bar{x}_{p-1} + x_p \bar{x}_p - x_{p+1} \bar{x}_{p+1} - \dots - x_{r-1} \bar{x}_{r-1} = 0.$$

Dazu geht man zunächst von den affinen Koordinaten des C^n vermöge

$$y_v = \frac{u_{v-1}}{u_p} \quad , \quad v = 1, 2, \dots, p \quad ,$$

$$y_v = \frac{u_v}{u_p} \quad , \quad v = p+1, p+2, \dots, n \quad ,$$

zu homogenen Koordinaten über. (2.22) nimmt dadurch die Gestalt an:

$$(2.24) \quad \sum_{v=0}^{p-1} u_v \bar{u}_v + \varepsilon u_p \bar{u}_p - \sum_{v=p+1}^n u_v \bar{u}_v = 0 \quad .$$

Die nichtsinguläre komplexe Transformation des projektiven Raumes $P^n(C)$

$$v_0 = u_0 + u_r$$

$$v_v = u_v \quad , \quad v = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$

$$v_r = \frac{1}{2} (u_0 - u_r)$$

führt (2.24) über in

$$(2.25) \quad v_r \bar{v}_0 + v_0 \bar{v}_r + \sum_{v=1}^{p-1} v_v \bar{v}_v + \varepsilon v_p \bar{v}_p - \sum_{v=p+1}^n v_v \bar{v}_v = 0 \quad .$$

Geht man nun vermöge

$$x = \frac{v_v}{v_0} \quad , \quad v = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

wieder zu affinen Koordinaten über, so erhält man die Quadrik (2.23), womit die komplex-projektive Äquivalenz von (2.22) und (2.23) bewiesen ist. Damit zeigen beide Flächen dasselbe Blätterungsverhalten. Wir haben demnach nur das Blätterungsverhalten der Quadrik (2.23) zu untersuchen:

- a) Sei $\varepsilon = 0$. Nach Satz 4 ist die Quadrik dann überall komplex-linear $(n-p)$ -dimensional geblättert. Man beachte, daß in (2.22) $2p \geq r$ ist, woraus $2(p-1) \geq r-2$ für (2.23) folgt.
- b) Ist $\varepsilon = +1$, so ergibt Satz 4, daß die Quadrik überall komplex-linear $(n-p-1)$ -dimensional geblättert ist. Aus der Voraussetzung $2p \geq r$ folgt nämlich erst recht $2p > r-1$.
- c) Für $\varepsilon = -1$ sind zwei Fälle zu unterscheiden. Gilt in (2.22) $2p \geq r+1$, so folgt für (2.23) $2(p-1) \geq r-1$, und nach Satz 4 ist die Quadrik überall komplex-linear $(n-p)$ -dimensional geblättert. Ist jedoch $2p = r$, so multiplizieren wir (2.22) mit -1 und erhalten nach einer Umnummerierung der Variablen

$$+1 + \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^k y_v \bar{y}_v = 0 .$$

Damit ist dieser Fall auf den mit $\varepsilon = +1$ zurückgeführt, und es liegt überall eine komplex-lineare $(n-p-1)$ -dimensionale Blätterung vor.

Die angegebenen Blätterungsdimensionen sind maximal.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

Satz 6. Eine hermitesche Quadrik des C^n , die nicht die Voraussetzungen von Satz 4a erfüllt, besitzt bis auf komplex-lineare Transformationen des C^n genau eine Gleichung der Form

$$\varepsilon + y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - y_r \bar{y}_r = 0 ,$$

wobei $2p \geq r$, $r \leq n$ und $\varepsilon = 0, +1$ oder -1 ist. Ist $\varepsilon = 0$ und $2p \geq r$, bzw. $\varepsilon = -1$ und $2p > r$, so ist die zugehörige Quadrik überall komplex-linear $(n-p)$ -dimensional geblättert. Andernfalls liegt überall eine komplex-lineare $(n-p-1)$ -dimensionale Blätterung vor. Die angegebenen Blätterungsdimensionen sind maximal.

2.4. Die komplex-analytischen Hyperflächen unter den Quadriken

Abschließend zu diesem Kapitel seien noch alle komplex-analytischen Hyperflächen¹⁾ unter den Quadriken bestimmt, da wir sie mit Hilfe der vorangehenden Überlegungen bis auf eine Ausnahme direkt angeben können. Man kann sie zwar auch aus der Formel von Krzoska ([7], 127) bestimmen, doch ist dieses zum Teil sehr mühsam.

$$(2.26) \quad Q: a + \alpha^T \alpha + \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} + e^T \alpha + \bar{e}^T \bar{\alpha} + e^T \beta \bar{e} = 0$$

sei die gemäß 1.2 vereinfachte Gleichung einer reellen

1) Unter einer komplex-analytischen Hyperfläche des C^n versteht man eine reell $(2n-1)$ -dimensionale Fläche des C^n , die in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte reell einparametrische Schar komplex-analytischer Flächen der komplexen Dimension $n-1$ ist.

quadratischen Hyperfläche des C^n . Soll Q komplex-analytische Hyperfläche sein, so muß nach Satz 1 die Anzahl der positiven Glieder der hermiteschen Form $e^T \mathcal{H}_j \bar{e}$ Null oder Eins sein.

Sei zunächst $\mathcal{H}_j = 0$. Nach Satz 4a ist dann Q fast überall¹⁾ komplex $(n-1)$ -dimensional geblättert. (2.26) kann deshalb folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{1}{2} a + x^T e + e^T \bar{x} e + i \cdot t = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

woraus man unmittelbar erkennt, daß Q analytische Hyperfläche des C^n ist.

Sei nun die Anzahl p der positiven Glieder der Matrix $\mathcal{H}_j$ gleich 1. Dann sind zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

Ist $\text{Rg } \mathcal{H}_j = 1$ und ist für wenigstens ein $v_0 \in \{2, 3, \dots, n\}$ die partielle Ableitung φ_{v_0} auf Q nicht identisch Null, so ist Q nach Satz 4a fast überall $(n-2)$ -dimensional geblättert, also keine komplex-analytische Hyperfläche.

Ist $\text{Rg } \mathcal{H}_j = 1$ und verschwindet φ_v identisch auf Q für $v = 2, 3, \dots, n$, so ist Q nach Satz 5 mindestens und nach Satz 1 höchstens komplex $(n-1)$ -dimensional geblättert; also liegt in diesem Falle eine komplex-analytische Hyperfläche vor.

Wenn $\text{Rg } \mathcal{H}_j = 2$ ist, so muß Q notwendig vom Typ $H_{1,1}$ sein, wenn Q analytische Hyperfläche sein soll. Ebenso muß $\varphi_v = 0$ sein für $v = 3, 4, \dots, n$ auf ganz Q . Eine Quadrik Q dieses Typs ist nach den Ausführungen in Anschluß an Satz 5 genau dann analytische Hyperfläche des C^n , wenn Q , aufgefaßt als Quadrik des C^2 , komplex 1-dimensional geblättert ist. Nach dem in Kapitel 4 bewiesenen Satz 14 sind jedoch die einzigen Quadriken dieser Art bis auf komplex-lineare Transformationen des C^2 die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2) + x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2 &= 0 \\ x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

1) bis auf höchstens reell $(2n-2)$ -dimensionale Untermengen von Q

Damit haben wir

Satz 7. Unter den reellen quadratischen Hyperflächen des C^n , $n \geq 2$, sind genau die folgenden analytische Hyperflächen:

- a) Quadriken ohne hermiteschen Anteil
- b) Quadriken, in denen nur eine Variable explizit auftritt
- c) Quadriken, die sich komplex-linear auf

$$\frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2) + x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 = 0$$

oder

$$x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 = 0$$

transformieren lassen.

Kapitel 3. Ein notwendiges Blätterungskriterium und Quadriken mit $Rg \bar{\sigma} = 1$ und 2

3.1. Ein notwendiges Kriterium für die $(n-p)$ -dimensionale Blätterung von Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$

Wie wir in 2.2 festgestellt haben, ist es nur noch nötig, reelle Quadriken des C^n zu untersuchen, deren Gleichungen hermitesche Anteile vom Range n haben. Nach den in 1.2 beschriebenen Vereinfachungen genügt eine solche Quadrik einer Gleichung der Art

$$(3.1) \quad \varphi(x, \bar{x}) = \varepsilon + x^T \bar{\sigma} x + \bar{x}^T \bar{\sigma} \bar{x} + x^T \bar{g}_j \bar{x} = 0$$

mit

$$(3.2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{(p)} & \sigma \\ \sigma^T & \sigma^{(n-p)} \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(p)} \geq 0, \quad \sigma^{(n-p)} \leq 0,$$

und

$$(3.3) \quad g_j = \begin{pmatrix} g_j^{(p)} & \sigma \\ \sigma & -g_j^{(n-p)} \end{pmatrix}$$

wobei $2p \geq n$ und $p < n$ ist. ε nimmt die Werte 0, +1 oder -1 an.

Eine komplex-lineare Mannigfaltigkeit der Dimension s

$$(3.4) \quad x = x_0 + \sum_{\sigma=1}^s \beta_\sigma z_\sigma$$

liegt genau dann auf einer reellen Hyperfläche des C^n , wenn deren Gleichung $\varphi = 0$ durch (3.4) identisch erfüllt wird. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich im Falle einer Quadrik der Form (3.1) die folgenden Bedingungen:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & \text{I. } \varphi(x_0) = 0 \\ & \text{II. } (2\sigma x_0 + g_j \bar{x}_0)^T \beta_\sigma = 0 \\ & \text{III. } \beta_\sigma^T \sigma \beta_\sigma = 0 \\ & \text{IV. } \beta_\sigma^T g_j \bar{\beta}_\sigma = 0, \quad \sigma, \varrho = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

und die dazu konjugiert komplexen. Diese Gleichungen sind für eine s -dimensionale lineare Blätterung der Quadrik Q im Punkte x_0 notwendig. Sie sind auch hinreichend, wenn man verlangt, daß die β_σ linear unabhängig in einer Flächenumgebung von x_0 sind, die Gleichungen (3.5) nicht nur für x_0 ,

sondern für alle $\mathcal{U}$ einer offenen Flächenumgebung $U(\mathcal{U}_0)$ erfüllt sind und die Komponenten der $\mathcal{B}_s$ stetig differenzierbar von $\mathcal{U} \in U(\mathcal{U}_0)$ abhängen.

Für die komplex-lineare s -dimensionale Blätterung einer Quadrik Q im C^n mit einer Gleichung (3.1) in einem nicht-singulären Punkte $\mathcal{U}_0$ ist notwendig und hinreichend: Zu jedem $\mathcal{U} \in U(\mathcal{U}_0)$ existiert ein s -dimensionaler komplexer Vektorraum, der jeweils von s linear unabhängigen Vektoren $\mathcal{B}_s$ aufgespannt wird, so daß gilt:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & (2\sigma\mathcal{U} + \mathcal{U}_j\bar{\mathcal{U}})^T \mathcal{B}_s = 0 \\ \text{II.} \quad & \mathcal{B}_s^T \sigma \mathcal{B}_s = 0 \\ \text{III.} \quad & \mathcal{B}_s^T \mathcal{U}_j \bar{\mathcal{B}}_s = 0, \quad s, s = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

und die $\mathcal{B}_s$ sind stetig differenzierbare Vektorfunktionen in $U(\mathcal{U}_0)$. Dafür sagen wir kurz: In einer Flächenumgebung $U(\mathcal{U}_0)$ von $\mathcal{U}_0$ gibt es zu jedem Punkt $\mathcal{U} \in U(\mathcal{U}_0)$ s linear unabhängige Vektoren $\mathcal{B}_s \neq 0$, $s = 1, \dots, s$, die paarweise die Bedingungen

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & (2\sigma\mathcal{U} + \mathcal{U}_j\bar{\mathcal{U}})^T \mathcal{B} = 0 \\ \text{II.} \quad & \mathcal{B}^T \sigma \mathcal{B} = 0 \\ \text{III.} \quad & \mathcal{B}^T \mathcal{U}_j \bar{\mathcal{B}} = 0 \end{aligned}$$

erfüllen.

Wir wollen im folgenden untersuchen, wieviel linear unabhängige Vektoren $\mathcal{B}_s$ es gibt, die für alle $\mathcal{U}$ einer Flächenumgebung $U(\mathcal{U}_0)$ von $\mathcal{U}_0$ den Gleichungen I und III in (3.7) paarweise genügen und unter welchen Bedingungen genau $n-p$ solcher Vektoren existieren. Da Gleichung II dabei unberücksichtigt bleibt, ist die Bedingung, die man daraus erhält, nur notwendig.

Man kann dieses Problem wegen Hilfssatz 1 auch umformulieren: Gesucht sind Rang und Index¹⁾ der hermiteschen Form

1) Der Index i einer hermiteschen Form $x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_p \bar{x}_p - x_{p+1} \bar{x}_{p+1} - \dots - x_r \bar{x}_r$ ist definiert durch $i = p - (r-p) = 2p - r$.

III in (3.7) unter der Nebenbedingung I, wenn $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung $U(\mathcal{U}_0)$ von $\mathcal{U}_0$ auf Q durchläuft.

Offensichtlich ist diese Frage beantwortet, wenn wir das folgende Problem gelöst haben: Gegeben sei die komplexe Ebene

$$(3.8) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{v=1}^n c_v x_v y_v = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

und die hermitesche Quadrik

$$(3.9) \quad \mathbf{y}^T \mathbf{y} \bar{\mathbf{y}} = \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v = 0, \quad 2p \geq n.$$

Bringt man (3.8) und (3.9) zum Schnitt, so erhält man wegen der Homogenität der Gleichungen das Nullstellengebilde einer hermiteschen Form des C^{n-1} . Gesucht sind Rang und Index dieser Form. Ehe wir diese Frage beantworten können, benötigen wir Aussagen und Verfahren, die es gestatten, eine hermitesche Form auf Normalform zu transformieren. Dazu beweisen wir zunächst

Hilfssatz 2. Gegeben sei die m -reihige hermitesche Matrix α mit

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{11} = \bar{\alpha}_{11}^T, \quad \alpha_{22} = \bar{\alpha}_{22}^T, \quad \alpha_{21} = \bar{\alpha}_{12}^T,$$

wobei α_{11} eine nichtsinguläre $(s \times s)$ -Matrix ($1 \leq s \leq m-1$), α_{22} eine $[(m-s) \times (m-s)]$ -Matrix und α_{12} eine $[s \times (m-s)]$ -Matrix ist. α_{11} sei einer s -reihigen Diagonalmatrix $\mathcal{D}_1$ mit den Diagonalgliedern $+1$ oder -1 ähnlich. Dann läßt sich durch eine nichtsinguläre m -reihige Transformationsmatrix $\mathcal{R}$ die Matrix α vermöge $\mathcal{R}^T \alpha \bar{\mathcal{R}}$ auf die Normalform

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 & \sigma \\ \sigma & \mathcal{D}_2 \end{pmatrix}$$

transformieren, wo $\mathcal{D}_2$ eine $(m-s)$ -reihige Diagonalmatrix mit den Diagonalgliedern 0 , $+1$ oder -1 ist, die der Matrix $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ ähnlich ist.

Beweis: α_{11} ist nach Voraussetzung der nichtsingulären Matrix $\mathcal{D}_1$ ähnlich, das heißt es existiert eine nichtsinguläre s -reihige Matrix derart, daß $\mathcal{T}_1^T \alpha_{11} \mathcal{T}_1 = \mathcal{D}_1$ gilt. Mit

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \sigma \\ \sigma & \mathcal{E}^{(m-s)} \end{pmatrix}$$

geht α über in

$$\alpha' = \mathcal{T}^T \alpha \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{T}_{11}^T \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \bar{\mathcal{T}}_{11} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Vermöge

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{(s)} & -\mathcal{H}_{11} \bar{\mathcal{T}}_{11}^T \bar{\alpha}_{12} \mathcal{X} \\ \sigma & \mathcal{X} \end{pmatrix}$$

wo $\mathcal{X}$ eine noch geeignet zu bestimmende nichtsinguläre komplexe $[(m-s) \times (m-s)]$ -Matrix ist, läßt sich α' weiter transformieren in

$$(3.10) \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{U}^T \alpha' \bar{\mathcal{U}} = (\mathcal{T} \mathcal{U})^T \alpha (\mathcal{T} \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \sigma \\ \sigma & \mathcal{X}^T (\alpha_{22} - \alpha_{21} \bar{\mathcal{T}}_{11} \mathcal{H}_{11}^T \mathcal{T}_{11}^T \alpha_{12}) \mathcal{X} \end{pmatrix}.$$

Wegen der Regularität von $\mathcal{T}_{11}$ gilt

$$(3.11) \quad \alpha_{11} = \mathcal{T}_{11}^{T^{-1}} \mathcal{H}_{11} \bar{\mathcal{T}}_{11}^{-1},$$

und außerdem ist wegen der Gestalt von $\mathcal{H}_{11}$

$$\mathcal{H}_{11}^2 = \mathcal{E}^{(s)},$$

was $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_{11}^{-1}$ zur Folge hat. Damit kann man statt (3.11) schreiben

$$\alpha_{11} = \mathcal{T}_{11}^{T^{-1}} \mathcal{H}_{11}^{-1} \bar{\mathcal{T}}_{11}^{-1} = (\bar{\mathcal{T}}_{11} \mathcal{H}_{11} \mathcal{T}_{11}^T)^{-1}$$

woraus $\bar{\mathcal{T}}_{11} \mathcal{H}_{11} \mathcal{T}_{11}^T = \alpha_{11}^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$(\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12})^T = \bar{\alpha}_{22}^T - \alpha_{12}^T (\bar{\alpha}_{11}^{-1})^T \alpha_{21}^T = \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12},$$

also ist die Matrix $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ hermitesch. Man kann daher $\mathcal{X}$ in (3.10) so wählen ([6], 33), daß $\mathcal{X}^T (\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}) \mathcal{X}$ eine Diagonalmatrix $\mathcal{H}_2$ mit den Diagonalgliedern 0, +1 oder -1 wird, also ist $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ einer Matrix $\mathcal{H}_2$ ähnlich. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Auf Grund dieses Hilfssatzes kann man schrittweise eine hermitesche Matrix auf Diagonalform transformieren. Bei beliebigen hermiteschen Matrizen α wird das jedoch wegen zu umfangreicher Rechnungen praktisch nicht möglich sein.

Dies ist für uns ohne Bedeutung. Wir betrachten nämlich im folgenden die spezielle hermitesche Form

$$(3.12) \quad \eta^T \alpha \bar{\eta}$$

mit

$$(3.13) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

und $\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, wobei die $\alpha_{\nu\mu}$ folgendes Aussehen haben:

$$(3.14) \quad \alpha_{11} = (a_\nu \bar{a}_\mu + \delta_{\nu\mu} u_\nu)_{\nu, \mu = 1, \dots, s}, \quad 1 \leq s \leq m-1,$$

$$(3.15) \quad \alpha_{12} = (a_\nu \bar{a}_\mu)_{\substack{\nu = 1, \dots, s \\ \mu = s+1, \dots, m}},$$

$$(3.16) \quad \alpha_{21} = \bar{\alpha}_{12}^T,$$

$$(3.17) \quad \alpha_{22} = (a_\nu \bar{a}_\mu + \delta_{\nu\mu} u_\nu)_{\nu, \mu = s+1, \dots, m}.$$

Für diese hermitesche Form soll nun der Ausdruck $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ berechnet werden.

Dazu müssen wir zunächst den Wert der Determinante von α_{11} berechnen. Man erhält:

$$(3.18) \quad \det \alpha_{11} = u_1 \dots u_s + \sum_{\sigma=1}^s a_\sigma \bar{a}_\sigma u_1 \dots \hat{u}_\sigma \dots u_s \quad ^1)$$

Dies läßt sich leicht verifizieren, indem man in α_{11} die mit $\frac{a_1}{a_1}$ multiplizierte erste Zeile von der σ -ten Zeile subtrahiert, danach die σ -te Zeile mit a_1 multipliziert und die σ -te Spalte durch a_1 dividiert ($\sigma, \sigma = 2, 3, \dots, s$). Dann erhält man:

$$\det \alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_1 \bar{a}_1 + u_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \dots & \bar{a}_s \\ -a_2 u_1 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 u_1 & 0 & u_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots \\ -a_s u_1 & 0 & 0 & \dots & u_s \end{vmatrix}$$

1) Das Zeichen " ^ " über einem Element x besagt, daß x weggelassen wird.

2) O.B.d.A. kann man $a_1 \neq 0$ voraussetzen.

Sei nun $\alpha_{\mathcal{H}}$ nichtsingulär. Dann kann man die inverse Matrix zu $\alpha_{\mathcal{H}}$ bestimmen. Man errechnet:

$$(3.19) \quad \alpha_{\mathcal{H}}^{-1} = \frac{1}{\det \alpha_{\mathcal{H}}} (\delta_{\varphi\sigma})_{\varphi, \sigma = 1, \dots, s}$$

mit

$$(3.20) \quad \delta_{\varphi\sigma} = -a_{\varphi} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\nu \neq \varphi, \sigma}^s u_{\nu} + \delta_{\varphi\sigma} \left(\sum_{\mu=1}^s a_{\mu} \bar{a}_{\mu} \prod_{\nu \neq \varphi, \mu}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \varphi}^s u_{\nu} \right).$$

Man überzeugt sich sofort von der Richtigkeit von (3.20):

Bezeichnen wir mit $h_{\varphi\tau}$ die Elemente der Produktmatrix

$\alpha_{\mathcal{H}}^{-1} \alpha_{\mathcal{H}}$, so finden wir:

$$\begin{aligned} \det \alpha_{\mathcal{H}} \cdot h_{\varphi\tau} &= \sum_{\sigma=1}^s \left[-a_{\varphi} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\nu \neq \varphi, \sigma}^s u_{\nu} + \delta_{\varphi\sigma} \left(\sum_{\mu=1}^s a_{\mu} \bar{a}_{\mu} \prod_{\nu \neq \varphi, \mu}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \varphi}^s u_{\nu} \right) \right] \cdot (a_{\sigma} \bar{a}_{\tau} + \delta_{\sigma\tau} u_{\sigma}) \\ &= a_{\varphi} \bar{a}_{\tau} \left(- \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\nu \neq \varphi, \sigma}^s u_{\nu} + \sum_{\mu=1}^s a_{\mu} \bar{a}_{\mu} \prod_{\nu \neq \varphi, \mu}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \varphi}^s u_{\nu} - \prod_{\nu \neq \varphi}^s u_{\nu} \right) \\ &\quad + \delta_{\varphi\tau} \left(\sum_{\mu=1}^s a_{\mu} \bar{a}_{\mu} \prod_{\nu \neq \varphi, \mu}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \varphi}^s u_{\nu} \right), \end{aligned}$$

also

$$h_{\varphi\tau} \cdot \det \alpha_{\mathcal{H}} = \delta_{\varphi\tau} \cdot \det \alpha_{\mathcal{H}},$$

womit die Richtigkeit gezeigt ist.

Ist insbesondere $u = u_1 = u_2 = \dots = u_s \neq 0$, so ergibt sich aus (3.20):

$$(3.20a) \quad \delta_{\varphi\sigma} = u^{s-2} (-a_{\varphi} \bar{a}_{\sigma} + \delta_{\varphi\sigma} (u + \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma})).$$

Jetzt ist es einfach, die Matrix $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ zu berechnen. Wir erhalten zunächst für das Produkt der Matrizen α_{21} und α_{11}^{-1} , wenn $\alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} = (f_{\mu\tau})_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \tau=1, \dots, s}}$ ist:

$$\begin{aligned} f_{\mu\tau} \cdot \det \alpha_{\mathcal{H}} &= \sum_{\sigma=1}^s a_{\mu} \bar{a}_{\sigma} \left[-a_{\sigma} \bar{a}_{\tau} \prod_{\nu \neq \sigma, \tau}^s u_{\nu} + \delta_{\sigma\tau} \left(\sum_{\lambda=1}^s a_{\lambda} \bar{a}_{\lambda} \prod_{\nu \neq \sigma, \lambda}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \sigma}^s u_{\nu} \right) \right] \\ &= a_{\mu} \bar{a}_{\tau} \left(- \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\nu \neq \sigma, \tau}^s u_{\nu} + \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\nu \neq \sigma, \tau}^s u_{\nu} + \prod_{\nu \neq \tau}^s u_{\nu} \right) = a_{\mu} \bar{a}_{\tau} \prod_{\nu \neq \tau}^s u_{\nu}, \end{aligned}$$

und damit berechnet man $(\alpha_{21} \alpha_{11}^{-1}) \alpha_{12} = (1_{\mu\kappa})_{\mu, \kappa=1, \dots, m}$ zu:

$$1_{\mu\kappa} \cdot \det \alpha_{\mathcal{H}} = \sum_{\tau=1}^s (a_{\mu} \bar{a}_{\tau} \prod_{\nu \neq \tau}^s u_{\nu}) a_{\tau} \bar{a}_{\kappa} = a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} \sum_{\tau=1}^s a_{\tau} \bar{a}_{\tau} \prod_{\nu \neq \tau}^s u_{\nu}.$$

Bezeichnen wir die Elemente der Matrix $\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ mit $r_{\mu\kappa}$, so wird

$$r_{\mu\kappa} = \frac{1}{\det \alpha_{\mu\kappa}} \left[\left(\prod_{\nu=1}^s u_{\nu} + \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \sigma}}^s u_{\nu} \right) (a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} + \delta_{\mu\kappa} u_{\kappa}) - \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \sigma}}^s u_{\nu} a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} \right] \\ = \frac{1}{\det \alpha_{\mu\kappa}} (a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} \prod_{\nu=1}^s u_{\nu} + \delta_{\mu\kappa} u_{\kappa} (\prod_{\nu=1}^s u_{\nu} + \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \sigma}}^s u_{\nu})) .$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$(3.21) \quad \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} = \left(\frac{\prod_{\nu=1}^s u_{\nu}}{\det \alpha_{11}} a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} + \delta_{\mu\kappa} u_{\kappa} \right)_{\mu, \kappa = s+1, \dots, m \cdot n} .$$

Gilt $u = u_1 = u_2 = \dots = u_s \neq 0$, so vereinfacht sich (3.21) zu:

$$(3.21a) \quad \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} = \left(\frac{u}{\sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \bar{a}_{\sigma}} a_{\mu} \bar{a}_{\kappa} + \delta_{\mu\kappa} u_{\kappa} \right)_{\mu, \kappa = s+1, \dots, m \cdot n} .$$

Wir benötigen im folgenden noch den Satz ([5], 197), daß eine beliebige hermitesche Matrix α positiv definit ist, wenn sämtliche Hauptunterdeterminanten¹⁾ $\det \alpha^{(\varrho)}$ positiv sind. Gilt für die Hauptunterdeterminanten von α : $\det \alpha^{(\varrho)} = (-1)^{\varrho} c_{\varrho}$, $c_{\varrho} > 0$, so ist die Matrix α negativ definit.

Nach diesen Überlegungen ist es uns möglich, die eingangs gestellten Fragen zu erledigen:

Gegeben seien also die hermitesche Quadrik (3.9) und die komplexe Ebene (3.8). Zunächst lassen wir die Voraussetzung $2p \geq n$ unberücksichtigt. Sodann nehmen wir wegen $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ an:

$$\sum_{\nu=1}^p c_{\nu} \bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=p+1}^n c_{\nu} \bar{c}_{\nu} \geq 0, \quad c_1 \neq 0 .$$

Das dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit tun, da wir im Falle $\sum_{\nu=1}^p c_{\nu} \bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=p+1}^n c_{\nu} \bar{c}_{\nu} < 0$ (3.9) mit -1 multiplizieren und gegebenenfalls die Variablen in (3.8) und (3.9) umnummerieren können.

1) Unter der ϱ -ten Hauptunterdeterminante $\det \alpha^{(\varrho)}$ einer n -reihigen Matrix α verstehen wir die Determinante der Matrix, die aus α durch Streichen der $(\varrho+1)$ -ten bis n -ten Zeilen und Spalten entsteht.

Sei also obige Bedingung erfüllt. Wir lösen (3.8) nach y_1 auf:

$$(3.22) \quad y_1 = -\frac{1}{c_1} \cdot \sum_{v=2}^n c_v y_v.$$

Setzen wir (3.22) in (3.9) ein, so erhalten wir

$$(3.23) \quad \frac{1}{c_1 c_1} \sum_{v, \mu=2}^n (c_v \bar{c}_\mu + \delta_{v\mu} k_v c_1 \bar{c}_1) y_v \bar{y}_\mu = 0$$

mit $k_v = +1$ für $v = 2, 3, \dots, p$, $k_v = -1$ für $v = p+1, \dots, n$.
In Matrizenschreibweise lautet (3.23):

$$(3.24) \quad \tilde{y}^T \mathcal{L} \tilde{y} = 0$$

mit

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei die $\mathcal{L}_{v\mu}$ wie folgt aussehen:

$$(3.25) \quad \mathcal{L}_{11} = (c_v \bar{c}_\mu + \delta_{v\mu} c_1 \bar{c}_1)_{v, \mu=2, 3, \dots, p}$$

$$(3.26) \quad \mathcal{L}_{12} = (c_v \bar{c}_\mu)_{\substack{v=2, \dots, p \\ \mu=p+1, \dots, n}}$$

$$(3.27) \quad \mathcal{L}_{21} = \mathcal{L}_{12}^T$$

$$(3.28) \quad \mathcal{L}_{22} = (c_v \bar{c}_\mu - \delta_{v\mu} c_1 \bar{c}_1)_{v, \mu=p+1, \dots, n}.$$

Die hermitesche Form (3.23) ist also von derselben Struktur wie die hermitesche Form (3.12), für die die in Hilfssatz 2 auftretenden Größen explizit berechnet wurden.

Um die Normalform von $\mathcal{L}$ zu bestimmen, wollen wir Hilfssatz 2 anwenden. Dazu benötigen wir erst Aussagen über die Normalform von $\mathcal{L}_{11}$. Bezeichnen wir mit $\det \mathcal{L}_{11}^{(\tau)}$ ($1 \leq \tau \leq p-1$) die Hauptunterdeterminanten der Matrix $\mathcal{L}_{11}$, so erhalten wir mit Hilfe von (3.18a)

$$\det \mathcal{L}_{11}^{(\tau)} = (c_1 \bar{c}_1)^{\tau-1} \sum_{v=1}^{\tau+1} c_v \bar{c}_v, \quad \tau = 1, 2, \dots, p-1.$$

Da alle Hauptunterdeterminanten von $\mathcal{L}_{11}$ positiv sind, ist $\mathcal{L}_{11}$ positiv definit und damit der hermiteschen Matrix $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}^{(p-1)}$ ähnlich. Damit ist Hilfssatz 2 anwendbar. Nach (3.21) findet

man

$$(3.29) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12} \mathcal{L}_{22}^{-1} \mathcal{L}_{21} = \frac{c_1 \bar{c}_1}{\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v} (c_\mu \bar{c}_\mu - \delta_{\mu\alpha} \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v)_{\mu, \alpha = p+1, \dots, n}.$$

Zu entscheiden ist noch, auf welche Normalform man $\mathcal{L}$ transformieren kann. $\mathcal{L}$ hat die Gestalt (3.14). Gemäß (3.18a) hat ihre δ -te Hauptunterdeterminante den Wert

$$(3.30) \quad \det \mathcal{L}^{(\delta)} = (-1)^\delta \frac{(c_1 \bar{c}_1)^\delta}{\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v} \left(\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^{p+\delta} c_v \bar{c}_v \right)$$

für $\delta = 1, 2, \dots, n-p$. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1. \text{ Fall: } \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v > 0.$$

Da die Ungleichung

$$(3.31) \quad \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v > 0$$

die Ungleichung

$$\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^{p+\delta} c_v \bar{c}_v > 0, \quad \delta = 1, 2, \dots, n-p,$$

zur Folge hat, ist bei Gültigkeit der Ungleichung (3.31) für den Vektor $\mathbf{z}$ die Matrix $\mathcal{L}$ negativ definit, da die Hauptunterdeterminanten dann alternieren. Damit ist das Nullstellengebilde der hermiteschen Form (3.23) äquivalent zu

$$\sum_{v=1}^{p-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p}^{n-1} z_v \bar{z}_v = 0.$$

$$2. \text{ Fall: } \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v = 0.$$

Außer dieser Gleichung sei

$$(3.32) \quad \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^{p+t} c_v \bar{c}_v = 0,$$

aber

$$(3.33) \quad \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^{p+t-1} c_v \bar{c}_v > 0,$$

wo t eine der Zahlen $1, 2, \dots, n-p$ ist. Dann folgt

$$(3.34) \quad c_{p+t+1} = c_{p+t+2} = \dots = c_n = 0.$$

Um die Normalform von $\mathcal{L}$ zu bestimmen, spalten wir $\mathcal{L}$ folgendermaßen auf:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathcal{L}_{11} = f \cdot (c_\mu \bar{c}_\mu - \delta_{\mu\alpha} \sum_{\nu=1}^p c_\nu \bar{c}_\nu)_{\mu, \alpha = p+1, \dots, p+t-1}$$

$$\mathcal{L}_{12} = f \cdot (c_\mu \bar{c}_\mu)_{\substack{\mu = p+1, \dots, p+t-1 \\ \alpha = p+t, \dots, n}}$$

$$\mathcal{L}_{21} = \overline{\mathcal{L}_{12}}^T$$

$$\mathcal{L}_{22} = f \cdot (c_\mu \bar{c}_\mu - \delta_{\mu\alpha} \sum_{\nu=1}^p c_\nu \bar{c}_\nu)_{\mu, \alpha = p+t, \dots, n},$$

wobei zur Abkürzung $f = \frac{c_1 \bar{c}_1}{\sum_{\nu=1}^p c_\nu \bar{c}_\nu}$ gesetzt wurde. Wegen (3.33)

und (3.30) ist $\mathcal{L}_{11}$ negativ definit. Wenden wir Hilfssatz 2 an und berechnen wir die Matrix $\mathcal{F} = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21} \mathcal{L}_{11}^{-1} \mathcal{L}_{12}$ nach Formel (3.21a), so wird

$$\mathcal{F} = \frac{c_1 \bar{c}_1}{\sum_{\nu=1}^p c_\nu \bar{c}_\nu - \sum_{\nu=p+1}^{p+t-1} c_\nu \bar{c}_\nu} (c_\mu \bar{c}_\mu - \delta_{\mu\alpha} (\sum_{\nu=1}^p c_\nu \bar{c}_\nu - \sum_{\nu=p+1}^{p+t-1} c_\nu \bar{c}_\nu))_{\mu, \alpha = p+t, \dots, n},$$

und unter Berücksichtigung von (3.32) und (3.34) hat die $(n-p-t+1)$ -reihige Matrix $\mathcal{F}$ das Aussehen

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_1 \bar{c}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \bar{c}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_1 \bar{c}_1 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt die hermitesche Quadrik (3.23) des C^{n-1} die Normalform

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} z_\nu \bar{z}_\nu - \sum_{\nu=p}^{n-2} z_\nu \bar{z}_\nu = 0.$$

Wie man sofort sieht, ändert sich an den Ergebnissen nichts, wenn

$$(3.35) \quad \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v \geq 0$$

ist und statt c_1 ein c_v mit $v \in \{2, 3, \dots, p\}$ von Null verschieden ist.

Wir wollen nun die anfangs nicht berücksichtigte Voraussetzung $2p \geq n$ wieder aufgreifen. Sei also für die Ebene (3.8) und die Quadrik (3.9)

$$(3.36) \quad \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v < 0$$

und $2p \geq n$. Dann multiplizieren wir (3.9) mit -1 :

$$\sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v - \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v = 0, \quad 2(n-p) \leq n.$$

Wegen der Existenz eines $c_v \neq 0$, $v \in \{p+1, \dots, n\}$, was eine Folge von (3.36) ist, folgt aus dem oben behandelten

1. Fall: Ist $\sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v - \sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v > 0$, so ist (3.9)

unter der Nebenbedingung (3.8) auf die Normalform

$$(3.37) \quad \sum_{v=p+1}^{n-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=1}^p z_v \bar{z}_v = 0$$

transformierbar.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Hilfssatz 3. Die hermitesche Form $\sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v$ ($2p \geq n$)

des C^n läßt sich unter der Nebenbedingung $\sum_{v=1}^n c_v y_v = 0$ auf

genau eine der folgenden Normalformen komplex-linear transformieren:

- (a) $\sum_{v=1}^{p-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p}^{n-1} z_v \bar{z}_v$, falls $\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v > 0$,
- (b) $\sum_{v=1}^{p-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p}^{n-2} z_v \bar{z}_v$, falls $\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v = 0$,
- (c) $\sum_{v=1}^p z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p+1}^{n-1} z_v \bar{z}_v$, falls $\sum_{v=1}^p c_v \bar{c}_v - \sum_{v=p+1}^n c_v \bar{c}_v < 0$.

Rang und Index einer hermiteschen Form des C^n sind Invarianten gegenüber linearen Transformationen des C^n . Bei linearen Transformationen gehen linear unabhängige Vektoren in linear unabhängige Vektoren über unter der Voraussetzung, daß die Transformationen nichtsingulär sind. Da außerdem wegen der linearen Gleichung (3.22) mit $\tilde{\eta}_s$, $s = 1, 2, \dots, s$, (s.3.24) auch die η_s linear unabhängig sind und umgekehrt mit den η_s auch die $\tilde{\eta}_s$, so braucht man nur die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^{n-1} zu bestimmen, die paarweise die Gleichung

$$(3.38) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{v=1}^{p-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p}^{n-1} z_v \bar{z}_v = 0, \\ (b) \quad & \sum_{v=1}^{p-1} z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p}^{n-2} z_v \bar{z}_v = 0 \quad \text{oder} \\ (c) \quad & \sum_{v=1}^p z_v \bar{z}_v - \sum_{v=p+1}^{n-1} z_v \bar{z}_v = 0 \end{aligned}$$

erfüllen, um die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^n zu erhalten, die paarweise der hermiteschen Form (3.9) unter der Nebenbedingung (3.8) genügen.

Sei zunächst in (3.9) $2p \geq n+1$, das heißt $2(p-1) \geq n-1$. Dann ist die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^{n-1} , die (3.38) genügen, gemäß Hilfssatz 1 $n-p$ für (a) und (b), $n-p-1$ für (c). Ist $2p = n$ in (3.9), so gilt in (a) nicht $2(p-1) \geq n-1$. Daher multiplizieren wir Gleichung (a) mit -1 , um Hilfssatz 1 anwenden zu können. Nun ist $2(n-p) = 2p > 2p-1 = n-1$, und es gibt maximal $n-p-1$ linear unabhängige Vektoren, die paarweise (3.38) (a) erfüllen. Die entsprechenden Anzahlen für $2p = n$ sind im Falle (b) $n-p$ und im Falle (c) $n-p-1$, wie direkt aus Hilfssatz 1 folgt. Damit haben wir

Hilfssatz 4. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^n , die paarweise der Gleichung $\eta^T \tilde{\eta} \tilde{\eta} = 0$ mit $\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \xi^{(p)} & \sigma \\ \sigma & -\xi^{(n-p)} \end{pmatrix}$, $2p \geq n$, unter der Nebenbedingung $\xi^T \eta = 0$ genügen, ist

(a) $n-p$, wenn

(α) $2p \geq n+1$ und $\varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} \geq 0$ oder

(β) $2p = n$ und $\varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} = 0$ gilt;

(b) $n-p-1$, wenn

(α) $2p \geq n$ und $\varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} < 0$ oder

(β) $2p = n$ und $\varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} > 0$ gilt.

Mit diesem Hilfssatz können wir das eingangs gestellte Problem lösen. Wir haben nur statt ε den Vektor $(2\bar{\sigma}\varepsilon + \eta_j \bar{\varepsilon})$ und statt η_j den Vektor $\bar{\sigma}$ in Hilfssatz 4 zu schreiben. Es ist

$$\begin{aligned} \varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} &= (2\bar{\sigma}\varepsilon + \eta_j \bar{\varepsilon})^T \eta_j (2\bar{\sigma}\varepsilon + \eta_j \bar{\varepsilon}) \\ &= 4\varepsilon^T \bar{\sigma} \eta_j \bar{\sigma} \varepsilon + 2\varepsilon^T \bar{\sigma} \varepsilon + 2\bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} \varepsilon + \varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon}, \end{aligned}$$

woraus unter Berücksichtigung von (3.1)

$$(3.39) \quad \varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} = \varepsilon^T (4\bar{\sigma} \eta_j \bar{\sigma} - \eta_j) \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon$$

folgt. Mit Hilfe von Satz 2 erhalten wir somit

Satz 8. Notwendig für die komplex $(n-p)$ -dimensionale Blätterung einer reellen Quadrik Q des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$ mit einer Gleichung

$$z + \varepsilon^T \bar{\sigma} \varepsilon + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} + \varepsilon^T \eta_j \bar{\varepsilon} = 0$$

in einem Punkte ε_0 ist bei Bestehen der Ungleichung $2p \geq n+1$ die Existenz einer offenen Flächenumgebung $U(\varepsilon_0)$ von ε_0 , so daß für alle $\varepsilon \in U(\varepsilon_0)$ die Ungleichung

$$\varepsilon^T (4\bar{\sigma} \eta_j \bar{\sigma} - \eta_j) \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon \geq 0$$

erfüllt ist. Ist $2p = n$, so muß notwendig für alle $\varepsilon \in U(\varepsilon_0)$ gelten:

$$\varepsilon^T (4\bar{\sigma} \eta_j \bar{\sigma} - \eta_j) \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon = 0.$$

Aus Hilfssatz 4 folgt, daß eine Quadrik, die diese Bedingungen nicht erfüllt, wohl noch komplex $(n-p-1)$ -dimensional geblättert sein kann.

Gegeben sei eine Quadrik Q der Gestalt (3.1) vom Typ $H_{p,n-p}$; dabei sei σ eine Diagonalmatrix vom Range n . Wir wollen untersuchen, welche Gestalt Q auf Grund von Satz 8 annehmen muß, um eventuell komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert zu sein. Wir setzen $2p \geq n+1$ voraus. Die (3.39) entsprechende hermitesche Form nimmt wegen $\sigma = (\delta_{\nu\mu} t_{\nu})_{\nu,\mu=1,\dots,n}$, $t_{\nu} > 0$ für $\nu = 1, 2, \dots, p$, $t_{\nu} < 0$ für $\nu = p+1, \dots, n$ (siehe (3.2)) die Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^p (4t_{\nu}^2 - 1) x_{\nu} \bar{x}_{\nu} + \sum_{\nu=p+1}^n (-4t_{\nu}^2 + 1) x_{\nu} \bar{x}_{\nu} - 2\varepsilon$$

an. Für alle $x \in Q$ ist dieser Ausdruck genau dann nicht negativ, wenn $\varepsilon \leq 0$, $t_{\nu} \geq \frac{1}{2}$ für $\nu = 1, 2, \dots, p$ und $-\frac{1}{2} \leq t_{\nu} < 0$ für $\nu = p+1, p+2, \dots, n$ ist.

Wir benötigen in den weiteren Ausführungen dieses Kapitels eine Verallgemeinerung von Hilfssatz 4 auf beliebige hermitesche Formen vom Range n .

$$(3.40) \quad x^T \sigma x = 0$$

sei also das Nullstellengebilde einer hermiteschen Form vom Rang n und vom Index $2p-n$. Die Nebenbedingung sei

$$(3.41) \quad x^T x = 0.$$

Vermöge einer nichtsingulären linearen Transformation des C^n $x = T y$ bringen wir (3.40) auf Normalform:

$$(3.42) \quad y^T (T^T \sigma T) \bar{y} = y^T \mathcal{E} \bar{y} = 0.$$

(3.41) geht über in

$$(3.43) \quad (x^T T) y = (T^T x)^T \bar{y} = 0.$$

Für (3.42) und (3.43) gelten die Aussagen von Hilfssatz 4. Statt $x^T \mathcal{E} \bar{x}$ erhalten wir $x^T T \mathcal{E} T^T \bar{x}$. Nun ist aber $\mathcal{E} = T^T \sigma T$, woraus $\mathcal{E}^{-1} = T^{-1} \sigma^{-1} T^{-1}$ und damit $\mathcal{E} = T^{-1} \sigma^{-1} T^{-1}$ folgt, da $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$ gilt. Damit haben wir die Beziehung: $\sigma^{-1} = T \mathcal{E} T^T$, aus der unmittelbar

$$\bar{\sigma}^{-1} = \bar{\sigma}^{-1} = (\sigma^{-1})^T = T \mathcal{E} T^T$$

folgt. Zusammen mit Hilfssatz 4. folgt daher

Hilfssatz 4a. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^n , die paarweise der Gleichung $e^T \alpha \bar{e} = 0$ mit Rang $\alpha = n$ und Index $\alpha = 2p-n$, $2p \geq n$, unter der Nebenbedingung $\alpha^T e = 0$ genügen, ist

- (a) $n-p$, wenn
 (α) $2p \geq n+1$ und $\alpha^T (\alpha^{-1})^T \bar{\alpha} \geq 0$ oder
 (β) $2p = n$ und $\alpha^T (\alpha^{-1})^T \bar{\alpha} = 0$ gilt;
 (b) $n-p-1$, wenn
 (α) $2p \geq n$ und $\alpha^T (\alpha^{-1})^T \bar{\alpha} < 0$ oder
 (β) $2p = n$ und $\alpha^T (\alpha^{-1})^T \bar{\alpha} > 0$ gilt.

Wir wollen noch die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren y_v bestimmen, die paarweise der Gleichung

$$(3.44) \quad y^T y \bar{y} = 0, \quad y = \begin{pmatrix} e^{(p)} & \sigma & v \\ \sigma & -e^{(n-p-1)} & v \\ v & v & 0 \end{pmatrix}, \quad 2p \geq n-1,$$

unter der Nebenbedingung

$$(3.45) \quad x^T y = 0$$

genügen, da wir diese Anzahl im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen.

Lassen wir die Voraussetzung $2p \geq n-1$ unberücksichtigt, so ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_1 \neq 0$. Lösen wir also (3.45) nach y_1 auf und setzen das Ergebnis in (3.44) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\bar{y}^T x \bar{y} = 0 \text{ mit } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ und } x = (c_v \bar{c}_\mu + \delta_{v\mu} u_v)_{v,\mu=2,\dots,n},$$

wobei $u_v = c_1 \bar{c}_1$ für $v = 2, 3, \dots, p$, $u_v = -c_1 \bar{c}_1$ für $v = p+1, \dots, n-1$ und $u_n = 0$ gilt. Gemäß (3.18) errechnen wir

$$\det x = c_n \bar{c}_n (c_1 \bar{c}_1)^{n-2} (-1)^{n-p-1}.$$

Ist $c_n \neq 0$, so teilen wir x wie folgt auf:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & t_1 \\ t_1^T & c \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathcal{L}_1 = (c_\nu \bar{c}_\mu + \delta_{\nu\mu} k_\nu c_1 \bar{c}_1)$$

$$k_\nu = 1 \quad \text{für } \nu = 2, 3, \dots, p$$

$$k_\nu = -1 \quad \text{für } \nu = p+1, \dots, n-1$$

$$\mathcal{L}_1 = (c_\nu \bar{c}_n)_{\nu=2, \dots, n-1}$$

$$c = (c_n \bar{c}_n).$$

Wegen $c_n \bar{c}_n > 0$ können wir Hilfssatz 2 anwenden. Wir erhalten

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1 \bar{c}^{-1} \mathcal{L}_1^T = (\delta_{\nu\mu} k_\nu c_1 \bar{c}_1)_{\nu, \mu=2, \dots, n-1};$$

also besitzt $\mathcal{L}$ die Normalform

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(p)} & \sigma \\ \sigma & -\mathcal{L}^{(n-p-1)} \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigen wir $2p \geq n-1$ und ist $c_1 = \dots = c_p = 0$, so multiplizieren wir Gleichung (3.44) mit -1 , sind damit in den Voraussetzungen des eben geführten Beweises und erhalten nach abermaliger Multiplikation mit -1 das obige Ergebnis, d.h. die Aussage ist von $2p \geq n-1$ unabhängig.

Ist $c_n = 0$, so betrachten wir die Gleichungen (3.44) und (3.45) im $C^{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1})$ und wenden darauf Hilfssatz 4 an. Fassen wir die zugehörigen Lösungsvektoren wieder als Vektoren des $C^n(y_1, \dots, y_n)$ auf, so ist deren n -te Komponente gleich Null, und der Vektor $\mathcal{L}_n^{(n)} \cdot t$, $t \in \mathbb{C}$, der ebenfalls den Gleichungen (3.44) und (3.45) zusammen mit den Lösungsvektoren paarweise genügt, ist von diesen linear unabhängig. Es gilt also

Hilfssatz 5. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des V_C^n , die paarweise der Gleichung $\eta^T \mathcal{L} \bar{\eta} = 0$ mit

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(p)} & \sigma & \nu \\ \sigma & -\mathcal{L}^{(n-p-1)} & \nu \\ \nu & \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad 2p \geq n-1, \quad \text{unter der Nebenbedingung}$$

$\mathcal{L}^T \eta = 0$ genügen, ist $n-p-1$, wenn $c_n \neq 0$ ist. Ist $c_n = 0$, so ist diese Anzahl $n-p$, wenn zudem $\mathcal{L}^T \mathcal{L} \bar{c} \geq 0$ gilt; andernfalls ist sie $n-p-1$.

Abschließend zu 3.1 wollen wir Satz 8 noch etwas verallgemeinern. Man überzeugt sich sofort, daß die Gleichungen (3.7) gleichbedeutend sind mit (s. 2.2)

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} u_{\nu} = 0 \\ \text{II.} \quad & \sum_{\nu, \mu=1}^n \varphi_{\nu\mu} u_{\nu} u_{\mu} = 0 \\ \text{III.} \quad & \sum_{\nu, \mu=1}^n \varphi_{\nu\bar{\mu}} u_{\nu} \bar{u}_{\mu} = 0 \end{aligned}$$

Wir setzen nun nicht voraus, daß die Gleichung der Quadrik vereinfacht sei. Mit Hilfssatz 4a und Satz 8 gilt dann

Satz 8a. Eine reelle quadratische Hyperfläche Q des C^n sei durch eine Gleichung $\varphi(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ gegeben. Überall auf Q sei $\text{Rg}(\varphi_{\nu}, \varphi_{\bar{\nu}}) = 1$. Ferner sei dort überall der Rang der Funktionalmatrix $(\varphi_{\nu\bar{\mu}})_{\nu, \mu=1, \dots, n}$ gleich n und ihr Index $2p-n \geq 0$. Q ist höchstens dann komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn für alle Punkte der Quadrik Q

$$\begin{aligned} 2p \geq n+1 \quad \text{und} \quad (\varphi_{\nu})^T ((\varphi_{\nu\bar{\mu}})^{-1})^T (\varphi_{\bar{\nu}}) &\geq 0^1) \text{ oder} \\ 2p = n \quad \text{und} \quad (\varphi_{\nu})^T ((\varphi_{\nu\bar{\mu}})^{-1})^T (\varphi_{\bar{\nu}}) &= 0 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

3.2. Quadriken mit $\text{Rg } \mathcal{T} = 1$

Im folgenden betrachten wir reelle Quadriken des C^n vom Typ $H_{p, n-p}$ ($p < n$) mit einer gemäß 1.2 vereinfachten Gleichung

$$(3.46) \quad \varepsilon + \varepsilon^T \mathcal{T} \varepsilon + \bar{\varepsilon}^T \bar{\mathcal{T}} \bar{\varepsilon} + \varepsilon^T \mathcal{F} \bar{\varepsilon} = 0.$$

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf solche, auf denen der Rang von $\mathcal{T}$ gleich 1 ist.

Da $\mathcal{T}$ die Gestalt (3.2) hat, ergeben sich aus der Forderung $\text{Rg } \mathcal{T} = 1$ genau die folgenden drei Matrizen, die nicht

1) Es ist $(\varphi_{\nu}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$, $(\varphi_{\nu\bar{\mu}})^{-1} = ((\varphi_{\nu\bar{\mu}})_{\nu, \mu=1, \dots, n})^{-1}$.

durch Umnummerierung der Variablen ineinander überführbar sind:

$$(a) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} t & v \\ v & \sigma^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

$$(3.47) \quad (b) \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma^{(n-1)} & v \\ v & t \end{pmatrix}, \quad t < 0,$$

$$(c) \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma^{(p-1)} & v & v & \sigma \\ v & t & u & v \\ v & u & v & v \\ \sigma & v & v & \sigma^{(n-p-1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} tv - u^2 &= 0, \\ t > 0, v < 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Quadriken mit der Gleichung (3.46) auf komplex-analytische Blätterung untersuchen, wenn σ nacheinander von der Form σ_1 , σ_2 und σ_3 ist.

(a) Sei in (3.46) zunächst $\sigma = \sigma_1$. Wir bekommen dann eine Quadrik, die folgender Gleichung genügt:

$$(3.48) \quad \varepsilon + tx_1^2 + t\bar{x}_1^2 + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0$$

mit $p < n$ und $2p \geq n$. Untersuchen wir (3.48) auf komplex-lineare Blätterung (darin ist nach Satz 2 der Fall der allgemeinen $(n-p)$ -dimensionalen Blätterung enthalten), so lauten die (3.7) entsprechenden Gleichungen:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & (2tx_1 + \bar{x}_1)b_1 + \sum_{v=2}^p \bar{x}_v b_v - \sum_{v=p+1}^n \bar{x}_v b_v = 0 \\ \text{II.} \quad & tb_1^2 = 0 \\ \text{III.} \quad & \sum_{v=1}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^n b_v \bar{b}_v = 0. \end{aligned}$$

Jedem Punkt $e \in U(e_0)$ einer Q -Umgebung von e_0 ist nun eine Verteilung von Vektoren zugeordnet. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren dieser Verteilung ist gesucht. Nach den Ausführungen zu Beginn des Paragraphen 3.1 ist diese Anzahl die Blätterungsdimension.

Aus Gleichung II in (3.49) folgt $b_1 = 0$, da nach Voraussetzung $t > 0$ ist. (3.49) reduziert sich damit auf

$$(3.50) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{v=2}^p \bar{x}_v x_v - \sum_{v=p+1}^n \bar{x}_v b_v = 0 \\ \text{II.} \quad & \sum_{v=2}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^n b_v \bar{b}_v = 0. \end{aligned}$$

Die maximale Anzahl der Vektoren des V_C^{n-1} , die paarweise diese Gleichungen erfüllen, ist zu finden. Da $b_1 = 0$ gilt, liegen alle Blätterungsvektoren parallel zur Ebene $x_1 = 0$. Untersucht man daher das Blätterungsverhalten der Quadrik

$$(3.51) \quad \varepsilon^* + \sum_{v=2}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0$$

mit

$$(3.52) \quad \varepsilon^* = \varepsilon + tx_1^2 + t\bar{x}_1^2 + x_1 \bar{x}_1$$

im $C^{n-1}(x_2, \dots, x_n)$, so gelangt man ebenfalls zu dem System (3.50). Die Frage nach der maximalen Anzahl der Blätterungsvektoren der Quadrik (3.48) reduziert sich somit auf die Frage nach der maximalen Anzahl der Blätterungsvektoren der Quadrik (3.51). Dazu brauchen wir jedoch nur Satz 6 anzuwenden, da die maximalen Blätterungen stets linear sind: Ist $\varepsilon^* = 0$ und $2(p-1) \geq n-1$ bzw. $\varepsilon^* < 0$ und $2(p-1) > n-1$, so existieren maximal $n-p$ linear unabhängige Blätterungsvektoren, andernfalls sind es nur $n-p-1$.

Es sei noch erwähnt, daß man diese Ergebnisse auch über Hilfssatz 2 direkt aus dem System (3.50) erhalten kann.

Die dadurch gewonnenen Bereiche wollen wir näher untersuchen. Wir diskutieren den Fall $2p \geq n+2$, $\varepsilon^* \leq 0$, d.h.

$$(3.53) \quad \varepsilon + tx_1^2 + t\bar{x}_1^2 + x_1 \bar{x}_1 \leq 0,$$

reell geschrieben:

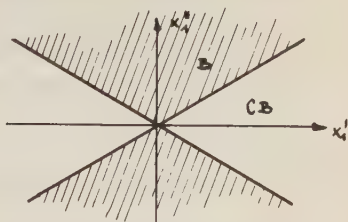
$$(3.54) \quad \varepsilon + x_1'^2(1+2t) + x_1''^2(1-2t) \leq 0.$$

Diese Ungleichung betrachten wir im $C^1(x_1)$.

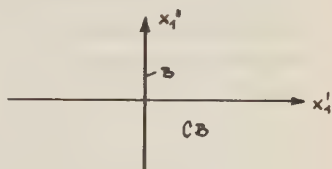
1. $\varepsilon = 0$

α) $t > \frac{1}{2}$. Steht in (3.54) das Gleichheitszeichen, so ist (3.54) eine einparametrische Schar zweier Geraden, die sich

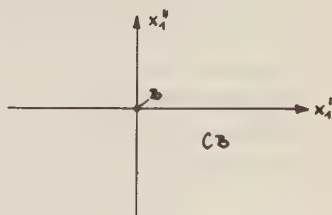
im Nullpunkt schneiden. Das $\leq$ -Zeichen in (3.54) ergibt das schraffierte Gebiet B einschließlich Rand. Auch das $>$ -Zeichen ist möglich; man erhält dann $\complement B$, das Komplement von B in Bezug auf $C^1(x_1)$. Wir haben $\dim B = 2$, $\dim \complement B = 2$.



$\beta)$ $t = \frac{1}{2}$. Das Gleichheitszeichen in (3.54) liefert eine Doppelgerade, die mit der x_1'' -Achse zusammenfällt. Das $<$ -Zeichen ist nicht möglich, wohl aber das $>$ -Zeichen. $\complement B$ besteht also aus der ganzen x_1 -Ebene ohne die imaginäre Achse; $\dim B = 1$, $\dim \complement B = 2$.



$\gamma)$ $0 < t < \frac{1}{2}$. Nur für den Nullpunkt der x_1 -Ebene gilt die Ungleichung (3.54). $\complement B$ besteht aus der im Nullpunkt punktierten x_1 -Ebene; $\dim B = 0$, $\dim \complement B = 2$.

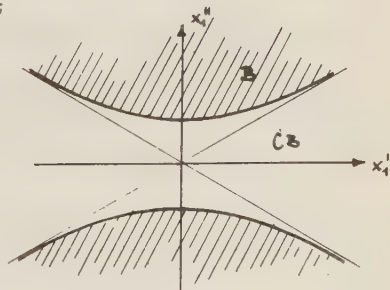


2. $\mathcal{E} = +1$

$\infty)$ $t > \frac{1}{2}$. (3.54) schreiben wir um:

$$-\frac{x_1'^2}{1+2t} + \frac{x_1''^2}{-1+2t} \geq 1.$$

Steht das Gleichheitszeichen, so stellt (3.54) eine einparametrische Hyperbelschar dar: Die Punkte des schraffierten Gebietes B einschließlich Rand genügen der Ungleichung (3.54); $\dim B = 2$, $\dim \complement B = 2$.



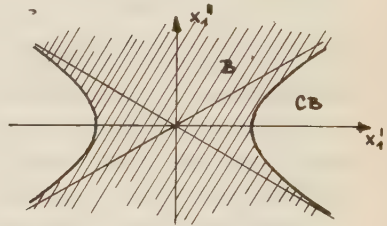
$\beta)$ $0 < t \leq \frac{1}{2}$. (3.54) hat nun die Gestalt: $x_1'^2(1+2t) + 1 + x_1''^2(1-2t) \leq 0$. Das $\leq$ -Zeichen ist für keinen Punkt $x_1 \in \mathbb{C}^1$ möglich, also ist $B = \emptyset$. $\complement B$ ist die ganze x_1 -Ebene; damit gilt: $\dim B = -1$, $\dim \complement B = 2$.

3. $\varepsilon = -1$

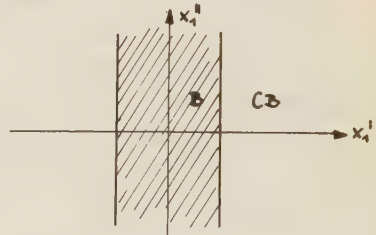
$\alpha)$ $t > \frac{1}{2}$. Statt (3.54) können wir nun schreiben:

$$\frac{x_1'^2}{1+2t} - \frac{x_1''^2}{2t-1} \leq 1.$$

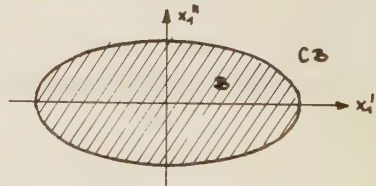
Das $\leq$ -Zeichen ergibt das schraffierte Gebiet B einschließlich Rand, also ist $\dim B = 2$, $\dim \complement B = 2$.



$\beta)$ $t = \frac{1}{2}$. Bei Gültigkeit des Gleichheitszeichens erhält man zwei parallele Geraden, und (3.54) ergibt das zwischen ihnen gelegene Gebiet. Es ist $\dim B = 2$, $\dim \complement B = 2$.



$\gamma)$ $0 < t < \frac{1}{2}$. (3.54) stellt das Innere einer Ellipse einschließlich Rand dar. Somit haben wir: $\dim B = 2$, $\dim \complement B = 2$.



Analoge Überlegungen hat man in den Fällen $2p = n+1$ und $2p = n$ durchzuführen. Man sieht zunächst, daß die Bedingung (3.51) nicht immer erfüllbar ist. So sind Quadriken (3.48) mit $\varepsilon = +1$ und $0 < t \leq \frac{1}{2}$ nirgends komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn $2p \geq n+2$ ist.

Mit $x_1 \in \mathbb{C}$, $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ erhalten wir für die reelle Dimension $\dim G$ des Bereiches $G = (B \times \mathbb{C}^{n-1}) \cap Q$: $\dim G = \dim B + (2n-3)$, sofern $\dim B \geq 0$ ist, wie man

unmittelbar erkennt. So gibt es etwa auf der Quadrik (3.48) mit $2p \geq n+2$ für $\varepsilon = 0$ und $0 < t < \frac{1}{2}$ einen reell $(2n-3)$ -dimensionalen Teilbereich, in dem sich die Quadrik als $(2p-3)$ -parametrische Schar komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension $n-p$ darstellen läßt. Diese Quadrik ist jedoch nach Definition in 1.1 nirgends komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert.

Weiter erkennt man, daß auf der Quadrik (3.48) in den Fällen mit $\dim B = 2$ ein reell $(2n-1)$ -dimensionaler Teilbereich G existiert, in dessen offenem Kern $\overset{\circ}{G}$ eine $(n-p)$ -dimensionale Blätterung vorliegt, außerhalb dessen jedoch die Blätterungsdimension um 1 niedriger ist. Dieses Verhalten der Quadrik (3.48) tritt erst im C^4 auf und nicht schon im C^3 . Im letzteren Falle folgt nämlich wegen $2p \geq 3$ und $p < 3 : p = 2$, und eine komplex-analytische 1-dimensionale Blätterung tritt dann nach den Ausführungen unter (a) nur für Punkte $\mathfrak{e}$ ein, die der Gleichung (3.48) und

$$(3.55) \quad x_2 \bar{x}_2 - x_3 \bar{x}_3 = 0$$

genügen. Der Durchschnitt von (3.48) und (3.55) hat jedoch höchstens die reelle Dimension 4. Damit gibt es in keiner offenen Q -Umgebung U eines Punktes $\mathfrak{e}$ eine Darstellung von Q als 3-parametrische Schar komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension 1.

Dies folgt auch aus den Untersuchungen von D. Kahle, der in [4] sogar gezeigt hat, daß alle reellen Quadriken des C^3 mit $\operatorname{Rg} \mathfrak{g} = 3$ entweder nirgends oder überall geblättert sind. Diese Besonderheit von gewissen Quadriken des C^n , $n \geq 4$, in Bezug auf ihr Blätterungsverhalten halten wir fest in

Satz 9. Es gibt reelle quadratische Hyperflächen Q des C^n , $n \geq 4$, die in einem offenen $(2n-1)$ -dimensionalen Teilbereich G von Q eine Blätterung aufweisen, deren Dimension nicht mit der auf $Q - \bar{G}^{(1)}$ übereinstimmt.

1) $\bar{G}$ ist die abgeschlossene Hülle von G .

Tabelle 1

Maximale lineare Blätterung der Quadrik $Q: \varepsilon + tx_1^2 + t\bar{x}_1^2 + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0$

Blätterungsdimension $\rightarrow$	$2p \geq n+2$		$2p = n+1$		$2p = n$	
	$n-p$		$n-p$		$n-p-1$	
	dim G	dim (Q-G)	dim G	dim (Q-G)	dim G	dim (Q-G)
$\varepsilon = 0:$	$t > \frac{1}{2}$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$
	$t = \frac{1}{2}$	$2n-2$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	-1
	$0 < t < \frac{1}{2}$	$2n-3$	$2n-3$	$2n-1$	$2n-1$	-1
$\varepsilon = +1:$	$t > \frac{1}{2}$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$
	$t = \frac{1}{2}$	-1	-1	$2n-1$	$2n-1$	-1
	$0 < t < \frac{1}{2}$	-1	-1	$2n-1$	$2n-1$	-1
$\varepsilon = -1:$	$t > \frac{1}{2}$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$
	$t = \frac{1}{2}$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$
	$0 < t < \frac{1}{2}$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$

Eine Übersicht über die komplex-lineare Blätterung der Quadrik Q mit der Gleichung (3.48) gibt Tabelle 1. Dazu ist zu bemerken: Ist $\dim G = m$, so existiert auf Q ein reell m -dimensionaler Teilbereich G , so daß Q dort entsprechend der über G stehenden Dimension s als $(m-2s)$ -parametrische Schar komplex-linearer Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension s dargestellt werden kann. Nur für $m = 2n-1$ ist Q in G gemäß Definition in 1.1 komplex s -dimensional geblättert.

Aus Tabelle 1 ersieht man, daß Quadriken Q mit einer Gleichung (3.48) vom Typ $H_{p,n-p}$ in keinem ihrer Punkte komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert sind, wenn $n \leq 2p \leq n+1$ gilt. Von den Quadriken (3.48) mit $2p \geq n+2$ sind nur diejenigen mit $\varepsilon = 0$ oder $+1$ und $t > \frac{1}{2}$ sowie alle mit $\varepsilon = -1$ auf einem Teilgebiet von Q komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert. Alle Quadriken (3.48) mit $2p \geq n+1$ weisen jedoch überall eine mindestens $(n-p-1)$ -dimensionale lineare Blätterung auf.

(b) Sei in (3.46) $\sigma = \sigma_2$. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$(3.56) \quad \varepsilon + tx_n^2 + t\bar{x}_n^2 + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0, \quad t < 0,$$

mit $p < n$ und $2p \geq n$.

Die (3.50) entsprechenden Gleichungen lauten wegen $b_n = 0$:

$$(3.57) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{v=1}^p \bar{x}_v b_v - \sum_{v=p+1}^{n-1} \bar{x}_v b_v = 0 \\ \text{II.} \quad & \sum_{v=1}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^{n-1} b_v \bar{b}_v = 0 \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung wie im Falle (a) ergibt unter Verwendung des Satzes 6: Ist

$$(3.58) \quad \varepsilon^* = \varepsilon + tx_n^2 + t\bar{x}_n^2 - x_n \bar{x}_n \leq 0,$$

so existieren maximal $n-p-1$ linear unabhängige Lösungsvektoren von (3.57), andernfalls nur $n-p-2$. Eine ähnliche Diskussion der Bereiche

$$(3.59) \quad \varepsilon - x_n'^2(1-2t) - x_n''^2(1+2t) \leq 0$$

liefert die Blätterungsgebiete auf Q .

Eine Übersicht über das Blätterungsverhalten der Quadrik (3.56) gibt Tabelle 2, die wie Tabelle 1 zu lesen ist.

Tabelle 2

Maximale lineare Blätterung der Quadrik Q:

$$\varepsilon + tx_n^2 + t\bar{x}_n^2 + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0$$

Blätterungsdimension →	n - p - 1	n - p - 2
	dim G	dim(Q-G)
$\varepsilon = 0 :$		
$t < -\frac{1}{2}$	2n-1	2n-1
$t = -\frac{1}{2}$	2n-1	-1
$-\frac{1}{2} < t < 0$	2n-1	-1
$\varepsilon = +1 :$		
$t < -\frac{1}{2}$	2n-1	2n-1
$t = -\frac{1}{2}$	2n-1	2n-1
$-\frac{1}{2} < t < 0$	2n-1	2n-1
$\varepsilon = -1 :$		
$t < -\frac{1}{2}$	2n-1	2n-1
$t = -\frac{1}{2}$	2n-1	-1
$-\frac{1}{2} < t < 0$	2n-1	-1

Man sieht, daß die Quadrik (3.56) nirgends komplex (n-p)-dimensional geblättert ist. Ist $p = n-1$, so weist (3.56) überhaupt keine Blätterung auf. Die Tabelle 2 zeigt ferner, daß alle Quadriken mit einer Gleichung (3.56) ein Teilgebiet

besitzen, in dem eine $(n-p-1)$ -dimensionale Blätterung vorliegt, vorausgesetzt $p \leq n-2$. Insbesondere sind Quadriken (3.56) mit $\varepsilon = 0, -1$ und $-\frac{1}{2} \leq t < 0$ überall $(n-p-1)$ -dimensional geblättert, wenn $p \leq n-2$ ist.

(c) Wir gelangen endlich zu dem Fall $\sigma = \sigma_3$. Quadrik (3.46) nimmt dann die Gestalt an:

$$(3.60) \quad \varepsilon + tx_p^2 + 2ux_p x_{p+1} + vx_{p+1}^2 + t\bar{x}_p^2 + 2\bar{u}\bar{x}_p \bar{x}_{p+1} + v\bar{x}_{p+1}^2 + \\ + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0$$

mit $t > 0, v < 0, tv - u^2 = 0, 2p \geq n$ und $p < n$. Dabei folgt aus $tv - u^2 = 0$:

$$u = \pm \sqrt{tv} = \delta i \sqrt{t|v|}, \quad \delta = \pm 1.$$

Zuerst untersuchen wir den Fall: $v + t = 0$. (3.60) geht über in

$$(3.61) \quad \varepsilon + t(x_p + i\delta x_{p+1})^2 + t(\bar{x}_p - i\delta \bar{x}_{p+1})^2 + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0.$$

Bei einem linearen Ansatz erhält man die folgenden (3.7) entsprechenden Gleichungen:

$$(3.62) \quad \text{I. } \sum_{v=1}^{p-1} \bar{x}_v b_v + (2t(x_p + i\delta x_{p+1}) + \bar{x}_p) \cdot b_p + \\ (2t(i\delta x_p - x_{p+1}) - \bar{x}_{p+1}) b_{p+1} - \sum_{v=p+2}^n \bar{x}_v b_v = 0$$

$$\text{II. } t(b_p + i\delta b_{p+1})^2 = 0$$

$$\text{III. } \sum_{v=1}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^n b_v \bar{b}_v = 0.$$

Aus der Gleichung II folgt wegen $t > 0$

$$(3.63) \quad b_{p+1} = i\delta b_p.$$

Damit ist die $(p+1)$ -te Komponente der Lösungsvektoren $\mathcal{B}$ von (3.62) linear durch die p -te Komponente darstellbar, und also

sind mit den Vektoren $\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1, \varphi \\ \vdots \\ b_{p+1}, \varphi \\ \vdots \\ b_n, \varphi \end{pmatrix} \in V_C^{n-1}, \varphi = 1, 2, \dots, r$, auch

die Vektoren $\mathfrak{B}_\varphi = \begin{pmatrix} b_{1,\varphi} \\ \vdots \\ b_{p+1,\varphi} \\ \vdots \\ b_{n,\varphi} \end{pmatrix} \in V_C^n$ linear unabhängig bzw. ab-

hängig und umgekehrt mit den $\mathfrak{B}_\varphi$ auch die $\tilde{\mathfrak{B}}_\varphi$. Das System (3.62) geht wegen (3.63) über in

$$(3.64) \quad \text{I.} \quad \sum_{v=1}^{p-1} \bar{x}_v b_v + (\bar{x}_p - i\delta \bar{x}_{p+1}) b_p - \sum_{v=p+2}^n \bar{x}_v b_v = 0$$

$$\text{II.} \quad \sum_{v=1}^{p-1} b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+2}^n b_v \bar{b}_v = 0.$$

Jetzt wenden wir Hilfssatz 5 an: Ist $x_p + i\delta x_{p+1} \neq 0$, so existieren maximal $n-p-1$ linear unabhängige Vektoren $\tilde{\mathfrak{B}}_\varphi \in V_C^{n-1}$, die paarweise den Gleichungen (3.64) genügen. Somit ist die Quadrik (3.61) in allen Punkten $\mathfrak{A}$ mit $x_p \neq 0$ oder $x_{p+1} \neq 0$ komplex-linear $(n-p-1)$ -dimensional geblättert. Für $x_p = 0$ und $x_{p+1} = 0$ gibt es maximal $n-p$ linear unabhängige Vektoren, wenn $\varepsilon \leq 0$ und $2p \geq n+1$ oder $\varepsilon = 0$ und $2p = n$ ist. Der Bereich auf der Quadrik (3.61), auf dem dies eintritt, hat jedoch nur die Dimension $2n-5$, und demnach ist die Quadrik überall maximal $(n-p-1)$ -dimensional linear geblättert.

Den Fall $v + t \neq 0$ können wir auf bereits behandelte Fälle zurückführen. Zunächst schreiben wir statt (3.60):

$$(3.65) \quad \varepsilon + (\sqrt{t} \cdot x_p + i\delta \sqrt{|v|} \cdot x_{p+1})^2 + (\sqrt{t} \cdot \bar{x}_p - i\delta \sqrt{|v|} \bar{x}_{p+1})^2 + x_p \bar{x}_p - x_{p+1} \bar{x}_{p+1} + \sum_{v=1}^{p-1} x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+2}^n x_v \bar{x}_v = 0.$$

Wir unterwerfen nun (3.65) einer komplex-linearen Transformation, die die hermitesche Form invariant läßt und die die Identität in den Variablen $x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ ist. Die allgemeinste Transformation dieser Art ist die folgende:

$$(3.66) \quad \begin{aligned} x_v &= y_v, \quad v = 1, 2, \dots, p-1, p+2, \dots, n, \\ x_p &= y_p e^{i\lambda_1} \cdot \cosh s + y_{p+1} e^{i\lambda_2} \cdot \sinh s \\ x_{p+1} &= y_p e^{i\lambda_3} \cdot \sinh s + y_{p+1} e^{i(\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1)} \cosh s. \end{aligned}$$

$s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind reelle Parameter. Vermöge (3.66) geht der analytische Anteil von (3.65) über in

$$a_1 y_p^2 + 2a_2 y_p y_{p+1} + a_3 y_{p+1}^2$$

mit

$$a_1 = (\sqrt{t} \cdot e^{i\lambda_1} \cosh s + i\delta \sqrt{|v|} e^{i\lambda_3} \sinh s)^2$$

$$a_3 = (\sqrt{t} e^{i\lambda_2} \sinh s + i\delta \sqrt{|v|} e^{i(\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1)} \cosh s)^2$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 a_3}.$$

Sei nun $v + t > 0$, das heißt $\frac{|v|}{t} < 1$, so kann man a_3 und damit auch a_2 durch geeignete Wahl der Parameter $s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu Null machen. Man hat sie nur so zu wählen, daß gilt:

$$e^{i(\lambda_1 - \lambda_3 + \delta \frac{\pi}{2})} \tanh s = \sqrt{\frac{|v|}{t}},$$

also etwa $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \delta \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\tanh s = \sqrt{\frac{|v|}{t}}$. Man errechnet damit: $a_1 = v + t$. Daher ist die Quadrik (3.65) auf die Form

$$\varepsilon + (t + v)(y_1^2 + \bar{y}_1^2) + \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v = 0 \quad 1)$$

komplex-linear transformierbar, und also ist sie einer Quadrik (3.48) äquivalent, deren Blätterungsverhalten Tabelle 1 beschreibt.

Sei $v + t < 0$ oder $\frac{t}{|v|} < 1$. Dann wähle man $s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so, daß

$$e^{i(\lambda_3 - \lambda_1 - \delta \frac{\pi}{2})} \tanh s = \sqrt{\frac{t}{|v|}}$$

ist, also etwa $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{\pi}{2}, \lambda_3 = \delta \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\tanh s = \sqrt{\frac{t}{|v|}}$. Damit erhält man $a_1 = 0, a_2 = 0$ und $a_3 = v + t < 0$. (3.65) ist daher komplex-linear auf

$$\varepsilon + (t + v)(y_n^2 + \bar{y}_n^2) + \sum_{v=1}^p y_v \bar{y}_v - \sum_{v=p+1}^n y_v \bar{y}_v = 0 \quad 2)$$

transformierbar, und Tabelle 2 gibt das Blätterungsverhalten dieser Quadrik an.

1) Umnummerierung der Variablen y_1 und y_p

2) Umnummerierung der Variablen y_{p+1} und y_n

Wir stellen fest:

Satz 10. Unter den reellen quadratischen Hyperflächen des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$ mit $2p \geq n$, $p < n$ und $n \geq 4$, die einer Gleichung (3.46) mit $Rg \mathfrak{T} = 1$ genügen, gibt es genau drei inäquivalente bezüglich ihres Blätterungsverhaltens. Ihre Normalformen sind:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \varepsilon + t(x_1^2 + \bar{x}_1^2) + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0, \quad t > 0, \\
 (3.67) \quad (b) \quad & \varepsilon + t(x_n^2 + \bar{x}_n^2) + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0, \quad t < 0, \\
 (c) \quad & \varepsilon + t((x_p + i\delta x_{p+1})^2 + (\bar{x}_p - i\delta \bar{x}_{p+1})^2) + \\
 & \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0, \quad t > 0, \delta = \pm 1.
 \end{aligned}$$

Keine von ihnen ist überall komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert. Jedoch gibt es auf Quadriken mit der Normalform (a), wenn $\varepsilon \geq 0$ und $t > \frac{1}{2}$ oder $\varepsilon = -1$ und $t > 0$ sowie $2p \geq n+2$ ist, offene Teilgebiete, in denen sie eine $(n-p)$ -dimensionale Blätterung aufweisen. Eine Übersicht über die maximale lineare Blätterung der Quadriken (a) und (b) geben die Tabellen 1 und 2; (c) ist überall maximal $(n-p-1)$ -dimensional komplex-linear geblättert.

Zu Satz 10 bemerken wir noch: Ist eine Quadrik Q vom Typ $H_{p,n-p}$ in einem Punkte $\mathfrak{e}_0$ $(n-p)$ -dimensional linear geblättert, so ist sie nach den Sätzen 1 und 2 dort nicht nur maximal linear, sondern schlechthin maximal geblättert. Ist eine Quadrik des angegebenen Typs in $\mathfrak{e}_0$ $(n-p-1)$ -dimensional linear, jedoch nicht $(n-p)$ -dimensional linear geblättert, so ist $n-p-1$ die maximale mögliche Blätterungsdimension überhaupt. Hingegen brauchen $(n-p-2)$ -dimensionale lineare Blätterungen nicht maximale Blätterungen schlechthin zu sein.

Eine explizite Berechnung der Blätterungsvektoren ist im allgemeinen sehr kompliziert, wenn nicht gar unmöglich. Im C^4 lassen sie sich jedoch mühelos finden. Als Beispiel betrachten wir deshalb den C^4 .

Von den Quadriken (3.67) untersuchen wir die Quadrik (a) im C^4 . Sie ist, wenn wir $p = 3$ voraussetzen, nur dann auf einem Teilbereich 1-dimensional geblättert, wenn $\varepsilon \geq 0$ und $t > \frac{1}{2}$ oder $\varepsilon = -1$ und $t > 0$ ist. Die Gleichungen (3.49) sind nun:

$$I. (2tx_1 + \bar{x}_1) \cdot b_1 + x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4 = 0$$

$$II. t \cdot b_1^2 = 0$$

$$III. b_1 \bar{b}_1 + b_2 \bar{b}_2 + b_3 \bar{b}_3 - b_4 \bar{b}_4 = 0.$$

Wir können $b_4 \neq 0$ voraussetzen, da sonst wegen der Gleichung III $\mathcal{B} = \emptyset$ wird; also wäre Quadrik (a) nicht geblättert. Da die Vektoren $\mathcal{B}$ nur bis auf eine komplexe Konstante bestimmt sind, können wir sie normieren, indem wir $b_4 = 1$ setzen. Das obige Gleichungssystem für $\mathcal{B}$ ist daher wegen $b_1 = 0$ gleichwertig mit

$$I. \bar{x}_2 b_2 + \bar{x}_3 b_3 - \bar{x}_4 = 0$$

$$II. b_2 \bar{b}_2 + b_3 \bar{b}_3 - 1 = 0.$$

Sei $x_2 \neq 0$; dann geht wegen

$$b_2 = - \frac{\bar{x}_2 b_3 - \bar{x}_4}{\bar{x}_2}$$

Gleichung II über in

$$(b_3 - \frac{x_3 \bar{x}_4}{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3}) (\bar{b}_3 - \frac{\bar{x}_3 x_4}{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3}) = \frac{x_2 \bar{x}_2}{(x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3)^2} (x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4).$$

Damit diese Gleichung bestehen kann, muß $x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4 \geq 0$ sein. Dies ist aber genau die Bedingung (3.51). Man findet nun sofort:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3} (x_2 \bar{x}_4 - e^{i\psi} \bar{x}_3 \sqrt{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4}) \\ \frac{1}{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3} (x_3 \bar{x}_4 + e^{i\psi} \bar{x}_2 \sqrt{x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4}) \end{pmatrix}.$$

1

Dabei ist ψ ein reeller Parameter. Man sieht also, daß der Blätterungsvektor nicht eindeutig bestimmt ist. Für $x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4 = 0$ hat er die Gestalt:

$$\mathfrak{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2\bar{x}_4 \\ x_3\bar{x}_4 \\ x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Die Existenz von $\mathfrak{b}$ hängt also wesentlich von der Verträglichkeit von $\mathfrak{e} \in \mathbb{Q}$ mit der Ungleichung $x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4 \geq 0$ ab, was wir schon in den vorangehenden Untersuchungen festgestellt hatten.

$$\text{Liegt } \tilde{\mathfrak{e}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathfrak{e} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \text{ außerhalb des}$$

Kegels $x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3-x_4\bar{x}_4 = 0$, so ist die betrachtete Quadrik dort geblättert. In jedem solchen Punkt existiert eine reell einparametrische Schar von Vektoren $\tilde{\mathfrak{b}}^{(1)}$, und die komplexen Geraden durch $\tilde{\mathfrak{e}}$ mit den Richtungen $\tilde{\mathfrak{b}}$ treffen den Kegel nicht. Der Vektor $\mathfrak{b}_R$ hat die Richtung der Mantellinien des Kegels.

3.3. Quadriken mit $\text{Rg } \mathfrak{Q} = 2$

Wir wenden uns in diesem Paragraphen Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$ mit einer Gleichung

$$(3.68) \quad \varepsilon + \mathfrak{e}^T \mathfrak{Q} \mathfrak{e} + \bar{\mathfrak{e}}^T \bar{\mathfrak{Q}} \bar{\mathfrak{e}} + \mathfrak{e}^T \mathfrak{Q}_1 \bar{\mathfrak{e}} = 0$$

und den Nebenbedingungen (3.2) und (3.3) zu, für die zusätzlich der Rang von $\mathfrak{Q}$ gleich 2 ist. Wegen $\text{Rg } \mathfrak{Q} = 2$ zerfällt der analytische Anteil (und damit auch der antianalytische) in zwei Linearfaktoren. Man sieht dies sofort ein, wenn man

1) Mit $\tilde{\mathfrak{b}}$ bezeichnen wir den Vektor des $\mathbb{C}^3$, der aus $\mathfrak{b}$ durch Streichen der ersten Komponente entsteht.

die Punkte $\mathcal{A} \in Q$ einer nichtsingulären komplex-linearen Transformation $\mathcal{A} = T\eta$ unterwirft, die die quadratische Form $\mathcal{A}^T \sigma \mathcal{A}$ nach dem Trägheitssatz für quadratische Formen in

$$(3.69) \quad y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + iy_2)(y_1 - iy_2)$$

überführt und dann vermöge $\eta = T^{-1}\mathcal{A}$ wieder rückgängig macht. Bezeichnen wir die erste Zeile von T^{-1} mit π_1^T , die zweite mit π_2^T , so lautet (3.69)

$$(\pi_1^T \mathcal{A} + i\pi_2^T \mathcal{A})(\pi_1^T \mathcal{A} - i\pi_2^T \mathcal{A}) = (\pi_1^T \mathcal{A})^2 + (\pi_2^T \mathcal{A})^2,$$

und es gilt

$$\mathcal{A}^T \sigma \mathcal{A} = (\pi_1^T \mathcal{A})^2 + (\pi_2^T \mathcal{A})^2 = ((\pi_1 + i\pi_2)^T \mathcal{A})((\pi_1 - i\pi_2)^T \mathcal{A}).$$

Somit ist (3.68) in der Form

$$(3.70) \quad \varepsilon + (\pi_1^T \mathcal{A})^2 + (\pi_2^T \mathcal{A})^2 + (\bar{\pi}_1^T \bar{\mathcal{A}})^2 + (\bar{\pi}_2^T \bar{\mathcal{A}})^2 + \mathcal{A}^T \mathcal{B} \bar{\mathcal{A}} = 0$$

darstellbar.

Untersuchen wir (3.70) auf komplex-lineare Blätterung, so erhält man die folgenden (3.7) entsprechenden Gleichungen:

$$(3.71) \quad \begin{aligned} \text{I.} & \quad (2(\pi_1^T \mathcal{A})\pi_1 + 2(\pi_2^T \mathcal{A})\pi_2 + \mathcal{B} \bar{\mathcal{A}})^T \cdot \mathcal{B} = 0 \\ \text{II.} & \quad (\pi_1 + i\delta\pi_2)^T \cdot \mathcal{B} = 0, \quad \delta = \pm 1 \\ \text{III.} & \quad \mathcal{B}^T \mathcal{B} \bar{\mathcal{B}} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen I und II sind lineare Gleichungen, III ist das Nullstellengebilde einer hermiteschen Form. Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\mathcal{B}_\delta$, die paarweise den Gleichungen (3.71) genügen, ist gesucht.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_1 + i\delta\pi_2, \\ \mathcal{A} &= 2(\pi_1^T \mathcal{A})\pi_1 + 2(\pi_2^T \mathcal{A})\pi_2 + \mathcal{B} \bar{\mathcal{A}}; \end{aligned}$$

also ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{A})$, das heißt $\mathcal{A}$ ist von $\mathcal{A} \in Q$ abhängig, und zwar linear, während π von $\mathcal{A} \in Q$ unabhängig ist. Das System (3.71) ist dann gleichbedeutend mit dem folgenden:

$$\begin{aligned}
 & \text{I.} \quad \star^T \tilde{\mathcal{R}} = 0 \\
 (3.72) \quad & \text{II.} \quad \star^T \tilde{\mathcal{R}} = 0 \\
 & \text{III.} \quad \tilde{\mathcal{R}}^T \tilde{\mathcal{R}} = 0.
 \end{aligned}$$

Zunächst bilden wir den Durchschnitt von II mit I und III. Ist etwa die ν_0 -te Komponente κ_{ν_0} des Vektors $\star$ von Null verschieden und bedeutet das Zeichen " $\sim$ " über Vektoren des V_C^n , daß jeweils die ν_0 -te Komponente dieser Vektoren weggelassen wurde, es sich also um Vektoren des V_C^{n-1}

handelt, so folgt aus (3.72) II:

$$(3.73) \quad b_{\nu_0} = -\frac{1}{r_{\nu_0}} \tilde{\star}^T \tilde{\mathcal{R}}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in (3.72) I ein, so ergibt sich

$$(3.74) \quad (r_{\nu_0} \tilde{\mathcal{R}} - \nu_{\nu_0} \tilde{\star})^T \tilde{\mathcal{R}} = 0,$$

und durch Einsetzen von (3.73) in (3.72) III:

$$(3.75) \quad \tilde{\mathcal{R}}^T \tilde{\mathcal{R}} = 0,$$

mit

$$\begin{aligned}
 (3.76a) \quad \tilde{\mathcal{R}} &= (r_{\nu} \bar{r}_{\mu} + \delta_{\nu\mu} \kappa_{\nu} r_{\nu_0} \bar{r}_{\nu_0})_{\nu, \mu=1,2,\dots,\hat{\nu}_0,\dots,p,p+1,\dots,n} \\
 \kappa_{\nu} &= +1 \text{ für } \nu = 1,2,\dots,\hat{\nu}_0,\dots,p, \quad \kappa_{\nu} = -1 \text{ für } \nu = p+1,\dots,n, \\
 &\text{bzw.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.76b) \quad \tilde{\mathcal{R}} &= (-r_{\nu} \bar{r}_{\mu} + \delta_{\nu\mu} \kappa_{\nu} r_{\nu_0} \bar{r}_{\nu_0})_{\nu, \mu=1,2,\dots,p,p+1,\dots,\hat{\nu}_0,\dots,n} \\
 \kappa_{\nu} &= +1 \text{ für } \nu = 1,2,\dots,p, \quad \kappa_{\nu} = -1 \text{ für } \nu = p+1,\dots,\hat{\nu}_0,\dots,n, \\
 &\text{je nachdem, ob } \nu_0 \in \{1,2,\dots,p\} \text{ oder } \nu_0 \in \{p+1,\dots,n\} \text{ ist.} \\
 &\text{"}\wedge\text{" bedeutet hier das Auslassungszeichen.}
 \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß $\tilde{\mathcal{R}}$ von $\nu \in Q$ unabhängig ist. Nach Hilfssatz 3 läßt sich (3.75) auf die Normalformen

$$\begin{aligned}
 (3.77) \quad & (a) \quad \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\nu} \bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=p}^{n-1} c_{\nu} \bar{c}_{\nu} = 0, \text{ falls } \star^T \tilde{\mathcal{R}} \star > 0, \\
 & (b) \quad \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\nu} \bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=p}^{n-2} c_{\nu} \bar{c}_{\nu} = 0, \text{ falls } \star^T \tilde{\mathcal{R}} \star = 0, \text{ oder} \\
 & (c) \quad \sum_{\nu=1}^p c_{\nu} \bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=p+1}^{n-1} c_{\nu} \bar{c}_{\nu} = 0, \text{ falls } \star^T \tilde{\mathcal{R}} \star < 0
 \end{aligned}$$

ist, transformieren. Da Rang und Index einer hermiteschen Form invariant gegenüber linearen Transformationen des C^n sind, hat $\tilde{\mathcal{R}}$ in den Fällen

- (a) den Rang $n-1$ und den Index $2p-n-1$,
- (b) den Rang $n-2$ und den Index $2p-n$,
- (c) den Rang $n-1$ und den Index $2p-n+1$.

Da die Komponente b_{v_0} der Vektoren $\mathfrak{B}$ nach (3.73) Linearkombination der übrigen Komponenten von $\mathfrak{B}$ ist, ist nur die Maximalzahl der linear unabhängigen Vektoren zu bestimmen, die den Gleichungen (3.74) und (3.75) paarweise genügen, um die Blätterungsdimension der Ausgangsquadrik zu erhalten. Dies geschieht nun einfach unter Zuhilfenahme der Hilfssätze 4a und 5. Dazu müssen wir die Fälle in (3.77) gesondert betrachten:

(a) Sei also der Rang von $\mathfrak{K}$ gleich $n-1$ und der Index $2p-n-1$. Zuerst behandeln wir den Fall, daß der Index von $\mathfrak{K}$ nicht negativ ist, das heißt $2p \geq n+1$, und wenden Hilfssatz 4a an: Die Maximalzahl der linear unabhängigen Lösungsvektoren ist $n-p$, wenn

- 1. $2(p-1) \geq n$ und $(r_{v_0}\tilde{w} - v_{v_0}\tilde{\pi})^T(\mathfrak{K}^{-1})(\bar{r}_{v_0}\tilde{w} - \bar{v}_{v_0}\tilde{\pi}) \geq 0$ oder
- 2. $2(p-1) = n-1$ und $(r_{v_0}\tilde{w} - v_{v_0}\tilde{\pi})^T(\mathfrak{K}^{-1})(\bar{r}_{v_0}\tilde{w} - \bar{v}_{v_0}\tilde{\pi}) = 0$ ist.

Sie ist $n-p-1$, wenn

- 1. $2(p-1) \geq n-1$ und $(r_{v_0}\tilde{w} - v_{v_0}\tilde{\pi})^T(\mathfrak{K}^{-1})(\bar{r}_{v_0}\tilde{w} - \bar{v}_{v_0}\tilde{\pi}) < 0$ oder
- 2. $2(p-1) = n-1$ und $(r_{v_0}\tilde{w} - v_{v_0}\tilde{\pi})^T(\mathfrak{K}^{-1})(\bar{r}_{v_0}\tilde{w} - \bar{v}_{v_0}\tilde{\pi}) > 0$ ist.

Da π und $\mathfrak{K}$ konstant und damit von $\mathcal{U} \in Q$ unabhängig sind, während w linear von $\mathcal{U}$ abhängt, stellt die Gleichung

$$(3.78) \quad R(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) \equiv (r_{v_0}\tilde{w} - v_{v_0}\tilde{\pi})^T(\mathfrak{K}^{-1})(\bar{r}_{v_0}\tilde{w} - \bar{v}_{v_0}\tilde{\pi}) = 0$$

für $\mathcal{U} \in C^n$ eine Quadrik des C^n dar und die obigen Ungleichungen die von ihr begrenzten Bereiche. Hat der Durchschnitt G eines solchen Bereiches mit der Quadrik Q die Dimension $2n-1$, so ist Q in G komplex $(n-p)$ - bzw. $(n-p-1)$ -dimensional geblättert, je nachdem in welchem Verhältnis Rang und Index zueinander stehen.

Ferner ist zu bemerken, daß man $\mathfrak{K}^{-1}$ in der Praxis mühelos berechnen kann. $\mathfrak{K}$ ist nämlich von der Gestalt $\alpha_{\mathcal{H}}$ in (3.14), und die inverse Matrix zu $\alpha_{\mathcal{H}}$ hat die Form (3.19) unter der Bedingung (3.20).

Wir haben unter (a) noch den Fall zu betrachten, daß der Index von $\mathcal{K}$ den Wert -1 hat, das heißt: $2p = n$. Dann multiplizieren wir (3.75) mit -1 , um einen positiven Index zu erhalten. Wegen $Rg \mathcal{K} = n-1$ und $Index \mathcal{K} = 1$ ist Hilfssatz 4a anwendbar: Es existieren maximal $n-p-1$ linear unabhängige Vektoren für die $\mathcal{K} \in Q$, die der Bedingung $R(\mathcal{K}, \bar{\mathcal{K}}) \leq 0$ genügen, andernfalls existieren maximal $n-p-2$.

(b) Nun ist $Rg \mathcal{K} = n-2$ und $Index \mathcal{K} = 2p-n$. Diesen Fall erledigen wir mit Hilfssatz 5. Durch eine geeignete nicht-singuläre Transformation des C^{n-1} bringen wir (3.75) auf die Form (3.77) (b), und (3.74) geht dabei in eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathcal{K}^T \mathcal{K} = 0$ des C^{n-1} über. Nach Hilfssatz 5 existieren mindestens $n-p-1$ linear unabhängige Lösungsvektoren von (3.77) (b) unter der Nebenbedingung $\mathcal{K}^T \mathcal{K} = 0$; also gibt es mindestens $(n-p-1)$ Lösungsvektoren von (3.75) unter der Nebenbedingung (3.74), die linear unabhängig sind.

Genau im Falle $u_{n-1} = 0$ gibt es $n-p$ solcher Vektoren, wenn noch zusätzlich $\sum_{v=1}^{p-1} u_v \bar{u}_v - \sum_{v=p}^{n-1} u_v \bar{u}_v \geq 0$ ist. $u_{n-1} = 0$ ist aber, wie man sofort erkennt, gleichbedeutend mit einer linearen Gleichung in $\mathcal{K}$. Der Durchschnitt dieser linearen Mannigfaltigkeit mit der Quadrik Q hat jedoch wegen der Unzerlegbarkeit der Gleichung von $Q^{(1)}$ in zwei Linearfaktoren höchstens die reelle Dimension $2n-2$. Damit ist die Quadrik überall maximal $(n-p-1)$ -dimensional komplex-linear geblättert.

(c) Die Anwendung von Hilfssatz 4a ergibt: Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\tilde{\mathcal{K}}$, die (3.75) unter der Nebenbedingung (3.74) genügen, ist wegen $2p \geq n$ $n-p-1$, wenn $R(\mathcal{K}, \bar{\mathcal{K}}) \geq 0$ und $n-p-2$, wenn $R(\mathcal{K}, \bar{\mathcal{K}}) < 0$ ist.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse in Tabelle 3 zusammen.

1) Wäre die Gleichung von Q in zwei Linearfaktoren zerlegbar, so wäre Q nach ([7], 119) komplex $(n-1)$ -dimensional geblättert, weil das für reelle Hyperebenen gilt (Widerspruch zu Satz 1).

Tabelle 3

Maximale lineare Blätterung von Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$ des C^n mit einer Gleichung: $\varepsilon + (\kappa_1^T \bar{\kappa})^2 + (\kappa_2^T \bar{\kappa})^2 + (\bar{\kappa}_1^T \bar{\kappa})^2 + (\bar{\kappa}_2^T \bar{\kappa})^2 + \kappa^T \bar{\kappa} \bar{\kappa} = 0$

Blätterungsdimension	$n - p$	$n - p - 1$	$n - p - 2$
(a) $\kappa^T \bar{\kappa} \bar{\kappa} > 0$			
1. $2p \geq n+2$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) \geq 0$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) < 0$	—
2. $2p = n+1$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) = 0$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) \neq 0$	—
3. $2p = n$	—	$R(\kappa, \bar{\kappa}) \leq 0$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) > 0$
(b) $\kappa^T \bar{\kappa} \bar{\kappa} = 0$	—	$R(\kappa, \bar{\kappa}) \geq 0$	—
(c) $\kappa^T \bar{\kappa} \bar{\kappa} < 0$	—	$R(\kappa, \bar{\kappa}) \geq 0$	$R(\kappa, \bar{\kappa}) < 0$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
 R(\kappa, \bar{\kappa}) &= (r_{v_0} \bar{\kappa} - v_{v_0} \bar{\kappa})^T (\bar{\kappa}^{-1})^T (\bar{r}_{v_0} \bar{\kappa} - \bar{v}_{v_0} \bar{\kappa}), \quad r_{v_0} \neq 0, \\
 \kappa &= \kappa_1 + i\delta \kappa_2, \quad \delta = \pm 1, \\
 \bar{\kappa} &= 2(\kappa_1^T \bar{\kappa}) \kappa_1 + 2(\kappa_2^T \bar{\kappa}) \kappa_2 + \bar{\kappa} \bar{\kappa}, \\
 \bar{\kappa} &= (r_v \bar{\Gamma}_\mu + \delta_{v\mu} k_v r_{v_0} \bar{\Gamma}_{v_0})_{v,\mu=1,\dots,\hat{v}_0,\dots,p,p+1,\dots,n} \\
 \text{oder} \quad \bar{\kappa} &= (-r_v \bar{\Gamma}_\mu + \delta_{v\mu} k_v r_{v_0} \bar{\Gamma}_{v_0})_{v,\mu=1,\dots,p,p+1,\dots,\hat{v}_0,\dots,n} \\
 \text{mit} \quad k_v &= +1 \text{ für } v = 1, 2, \dots, p, \quad k_v = -1 \text{ für } v = p+1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

Die Tabelle ist folgendermaßen zu verstehen: Eine Quadrik Q mit einer Gleichung (3.70) ist genau dann in einem Gebiet $G \subset Q$ maximal komplex s -dimensional linear geblättert, wenn neben der in der ersten Spalte stehenden Bedingung der Durchschnitt G von Q mit dem Bereich B , der durch die an der entsprechenden Stelle stehenden Ungleichung gegeben wird, die reelle Dimension $2n-1$ hat. Es bleibt also im Einzelfall nur die Dimension dieses Durchschnitts zu bestimmen.

Analog der Bemerkung im Anschluß an Satz 10 ist eine $(n-p)$ -dimensionale lineare Blätterung schlechthin maximal, ebenso bei Nichtauftreten einer $(n-p)$ -dimensionalen linearen Blätterung die $(n-p-1)$ -dimensionale lineare.

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

Satz 11. Alle reellen Quadriken Q des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$, $p < n$, $2p \geq n$, $n \geq 3$, mit einer Gleichung (3.1), in der $\mathcal{T}$ den Rang 2 hat, lassen sich in der Gestalt

$$\varepsilon + (\kappa_1^T \mathcal{U})^2 + (\kappa_2^T \mathcal{U})^2 + (\bar{\kappa}_1^T \bar{\mathcal{U}})^2 + (\bar{\kappa}_2^T \bar{\mathcal{U}})^2 + \mathcal{U}^T \mathcal{Q} \bar{\mathcal{U}} = 0$$

schreiben. Unter diesen sind nur diejenigen in einem Gebiete G von Q komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, für die $\kappa^T \mathcal{Q} \bar{\kappa} > 0^{1)}$ und $2p \geq n+2$ (bzw. $2p = n+1$) ist und für die der Durchschnitt G von Q mit dem Bereich $R(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) \geq 0^{2)}$ (bzw. mit der Quadrik $R(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) = 0$) die reelle Dimension $2n-1$ hat. Unter der Voraussetzung $p \leq n-3$ ist jedoch jede Quadrik mit $Rg \mathcal{T} = 2$ überall komplex $(n-p-2)$ -dimensional linear geblättert. Eine Übersicht gibt Tabelle 3.

Wir wollen Satz 11 an einem Beispiel illustrieren. Gegeben sei die reelle Quadrik des C^n , $n \geq 3$:

$$(3.80) \quad \varepsilon + t(x_1^2 + \bar{x}_1^2) + u(x_2^2 + \bar{x}_2^2) + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0,$$

und es ist $t > 0$ und $u > 0$. Man kann diese Quadrik in der Form (3.70) schreiben mit $\kappa_1^T = (\sqrt{t}, 0, 0, \dots, 0)$ und $\kappa_2^T = (0, \sqrt{u}, 0, \dots, 0)$, woraus man erhält:

$$\kappa^T = (\sqrt{t}, i\delta\sqrt{u}, 0, \dots, 0), \quad \delta = \pm 1.$$

Weiter findet man:

$$\mathcal{U}^T = (2tx_1 + \bar{x}_1, 2ux_2 + \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_p, -\bar{x}_{p+1}, \dots, -\bar{x}_n),$$

und wegen $r_1 \neq 0$ ist

$$\bar{\kappa} = (\delta_{\nu\mu} u_\nu)_{\nu, \mu=2, \dots, n}$$

1) Es ist: $\kappa = \kappa_1 + i\delta\kappa_2$, $\delta = \pm 1$.

2) Siehe (3.79)

mit $u_2 = \frac{u+t}{t}$, $u_\nu = +1$ für $\nu = 3, 4, \dots, p$, $u_\nu = -1$ für $\nu = p+1, \dots, n$. Man errechnet sofort

$$\mathcal{K}^{-1} = (\delta_{\nu\mu} u'_\nu)_{\nu, \mu = 2, \dots, n}$$

mit $u'_2 = \frac{t}{u+t}$, $u'_\nu = +1$ für $\nu = 3, 4, \dots, p$, $u'_\nu = -1$ für $\nu = p+1, \dots, n$. Es ist schließlich

$$x_1 \tilde{\omega} - v_1 \tilde{\pi} = \begin{pmatrix} (2ux_2 + \bar{x}_2) \sqrt{t} - (2tx_1 + \bar{x}_1) i \delta \sqrt{u} \\ \sqrt{t} \cdot \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \sqrt{t} \cdot \bar{x}_p \\ -\sqrt{t} \cdot \bar{x}_{p+1} \\ \vdots \\ -\sqrt{t} \cdot \bar{x}_n \end{pmatrix},$$

woraus man zusammen mit $\mathcal{K}^{-1}$ erhält:

$$\begin{aligned} (3.81) \quad R(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) &= (x_1 \tilde{\omega} - v_1 \tilde{\pi}) (\mathcal{K}^{-1})^T (\bar{x}_1 \tilde{\omega} - \bar{v}_1 \tilde{\pi}) = \\ &= \frac{t}{u+t} ((2ux_2 + \bar{x}_2) \sqrt{t} - (2tx_1 + \bar{x}_1) i \delta \sqrt{u}) ((2u\bar{x}_2 + x_2) \sqrt{t} + (2t\bar{x}_1 + x_1) i \delta \sqrt{u}) \\ &\quad + t \left(\sum_{\nu=3}^p x_\nu \bar{x}_\nu - \sum_{\nu=p+1}^n x_\nu \bar{x}_\nu \right) = 0. \end{aligned}$$

Wegen (3.80) können wir in (3.81) die zweite Summe durch x_1 , $\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ ausdrücken und erhalten an Stelle von (3.81) eine quadratische Form in $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$:

$$\begin{aligned} (3.82) \quad \frac{1}{t} R(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) &= -\varepsilon + \frac{u-t}{u+t} ((\sqrt{t} \cdot x_1 + i \delta \sqrt{u} x_2)^2 + (\sqrt{t} \bar{x}_1 - i \delta \sqrt{u} \bar{x}_2)^2) \\ &\quad + \frac{4ut-1}{u+t} (\sqrt{t} \cdot x_1 + i \delta \sqrt{u} x_2) (\sqrt{t} \bar{x}_1 - i \delta \sqrt{u} \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Sei zunächst $2p = n+1$. Dann ist die Quadrik (3.80) in einem Gebiet G maximal komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert nach Satz 11, wenn $R(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}})$ für alle $\mathcal{C} \in G$ verschwindet. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\varepsilon = 0$ ist und alle Koeffizienten der Form (3.82) verschwinden. Es muß also gelten: $u-t = 0$ und $4u \cdot t - 1 = 0$, d.h. $t = u = \frac{1}{2}$. Da in (3.82) $R(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}})$ für alle $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^n$ nun verschwindet, ist der Durchschnitt

der Quadrik (3.80) mit dem durch $R(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}) = 0$ definierten Bereich gleich die Quadrik (3.80) selbst, und wir haben: Die einzigen unter den Quadriken (3.80) mit $2p = n+1$, die wenigstens auf einem Teilgebiet eine $(n-p)$ -dimensionale Blätterung aufweisen, sind die mit $\varepsilon = 0$ und $t = u = \frac{1}{2}$, und diese sind überall komplex $(n-p)$ -dimensional linear geblättert. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist (3.80) überall maximal komplex $(n-p-1)$ -dimensional linear geblättert, was unmittelbar aus Tabelle 3 folgt.

In diesem Zusammenhang sei noch ein Ergebnis ohne Beweis angeführt. Man kann mit Satz 11 insbesondere alle Quadriken des C^3 vom Typ $H_{2,1}$ mit $Rg \mathcal{Q} = 2$ bestimmen, die überall komplex 1-dimensional geblättert sind. Eine umfangreichere Rechnung ergibt, daß ihre gemäß 1.2 vereinfachte Gleichung von der Form ist:

$$t(x_1^2 + \bar{x}_1^2 + x_2^2 + \bar{x}_2^2) + \sqrt{2(t^2 - \frac{1}{4})} (e^{i\alpha}(x_1 x_3 + i\delta x_2 x_3) + e^{-i\alpha}(\bar{x}_1 \bar{x}_3 - i\delta \bar{x}_2 \bar{x}_3)) \\ + x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 - x_3 \bar{x}_3 = 0, \quad t \geq \frac{1}{2}, \quad \delta = \pm 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nach den Ergebnissen in ([4], 67) läßt sich diese Gleichung komplex-linear auf (3.80) mit $\varepsilon = 0$, $u = t = \frac{1}{2}$ transformieren; dabei ist natürlich $n = 3$ und $p = 2$.

Wir betrachten nun die Quadriken (3.80), wenn $2p \geq n+2$ ist. Nach Satz 11 ist die Quadrik Q (3.80) dann und nur dann in einem Teilgebiet G komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn die Punkte $\mathcal{A} \in Q$, die der Ungleichung $R(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}) \geq 0$ genügen, einen reell $(2n-1)$ -dimensionalen Teilbereich der Quadrik ausfüllen. $R(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}})$ hat die Gestalt (3.82). Schreiben wir $R(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}})$ reell, so ist $R(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}) \geq 0$ wegen $t > 0$ gleichbedeutend mit

$$(3.83) \quad -\varepsilon + f_1(\sqrt{t} x_1' - \delta \sqrt{t} x_2'')^2 + f_2(\sqrt{u} x_2' + \delta \sqrt{t} x_1'')^2 \geq 0,$$

wobei $f_1 = \frac{(2t+1)(2u-1)}{u+t}$, $f_2 = \frac{(2t-1)(2u+1)}{u+t}$ ist.

Wir wollen nur die wesentlichsten Fälle diskutieren:

Ist $\varepsilon = +1$ und $0 < t \leq \frac{1}{2}$, $0 < u \leq \frac{1}{2}$, so gilt für kein $\mathcal{A} \in C^n$ die Ungleichung (3.83). Nach den Ausführungen dieses

Paragraphen ist dann Q nirgends $(n-p)$ -dimensional, jedoch überall $(n-p-1)$ -dimensional komplex-linear geblättert.

Ist $t > \frac{1}{2}$ und $u < \frac{1}{2}$, so ist bei jedem ε die Quadrik Q auf einem echten Teilgebiet von Q komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, außerhalb dieses Teilgebietes jedoch nur $(n-p-1)$ -dimensional.

Interessant ist, daß (3.83) für alle $\varepsilon \in Q$ erfüllt ist, wenn $\varepsilon \leq 0$ und $t \geq \frac{1}{2}$, $u \geq \frac{1}{2}$ ist. Das bedeutet nämlich, daß die Quadrik (3.80) in diesem Falle überall komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert ist, eine Eigenschaft, die bei Quadriken mit $Rg \mathfrak{T} = 1$ nicht auftrat.

Schließlich bemerken wir noch, daß im Falle $2p = n$ die einzigen Quadriken (3.80), die überall $(n-p-1)$ -dimensional geblättert sind, folgende Daten haben: $\varepsilon \geq 0$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, $0 < u \leq \frac{1}{2}$. Alle anderen weisen Teilgebiete auf, in denen sie nur eine $(n-p-2)$ -dimensionale lineare Blätterung haben.

Die Behandlung von Quadriken des C^n mit $Rg \mathfrak{A}_\gamma = n$ und $Rg \mathfrak{T} = \nu$, $\nu = 3, 4, \dots, n$, stößt auf erhebliche Schwierigkeiten, da in diesem Falle Gleichung (3.7) II nicht mehr linear und daher der Durchschnitt von II und III in (3.7) nicht mehr das Nullstellengebilde einer hermiteschen Form ist.

Kapitel 4. Kriterien für die lineare Blätterung

4.1. Zwei hinreichende Kriterien

Für reelle Quadriken des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$ können wir einfache Kriterien für die lineare Blätterung angeben, wenn der analytische Anteil in ihrer Gleichung gewisse Bedingungen erfüllt.

(a) Der analytische Teil $e^T \mathcal{T} e$ in der Gleichung einer reellen Quadrik weise (nach einer eventuellen Umnummerierung der Variablen) die Variablen $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_t$, $s+2 \leq t$, $s < p < t$, nicht auf. Die Gleichung einer solchen Quadrik Q lautet dann:

$$(4.1) \quad \Psi(e, \bar{e}) \equiv \varepsilon + P(x_1, \dots, x_s, x_{t+1}, \dots, x_n) + \bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0,$$

wo P eine quadratische Form in $x_1, \dots, x_s, x_{t+1}, \dots, x_n$ ist. Untersuchen wir (4.1) auf lineare Blätterung mit einem Ansatz (3.4), so sind die (3.7) entsprechenden Gleichungen:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{I.} & \quad \sum_{v=1}^n \varphi_v b_v = 0 \\ \text{II.} & \quad P(b_1, \dots, b_s, b_{t+1}, \dots, b_n) = 0 \\ \text{III.} & \quad \sum_{v=1}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^n b_v \bar{b}_v = 0. \end{aligned}$$

Das System reduziert sich auf

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \text{I.} & \quad \sum_{v=s+1}^p \varphi_v b_v - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v b_v = 0 \\ \text{II.} & \quad \sum_{v=s+1}^p b_v \bar{b}_v - \sum_{v=p+1}^t b_v \bar{b}_v = 0, \end{aligned}$$

wenn man $b_1 = b_2 = \dots = b_s = b_{t+1} = b_{t+2} = \dots = b_n = 0$ setzt. Dadurch erhält man eine spezielle Lösung von (4.2). Über die Lösbarkeit des Systems (4.3) können wir Aussagen machen:

Sei zunächst $2(p-s) \geq t-s$. Dann wenden wir Hilfssatz 4 an: Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Lösungsvektoren des Systems (4.3) ist

(α) $(t-s)-(p-s)$, d.h. $t-p$, wenn entweder

$$2(p-s) \geq t-s+1 \quad \text{und} \quad \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} \geq 0 \quad \text{oder}$$

$$2(p-s) = t-s \quad \text{und} \quad \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} = 0 \quad \text{gilt;}$$

(β) $(t-s)-(p-s)-1$, d.h. $t-p-1$, wenn entweder

$$2(p-s) \geq t-s \quad \text{und} \quad \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} < 0 \quad \text{oder}$$

$$2(p-s) = t-s \quad \text{und} \quad \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} > 0 \quad \text{gilt.}$$

Ist $2(t-p) > t-s$, d.h. $2(p-s) < t-s$, so multiplizieren wir beide Gleichungen in (4.3) mit -1 und wenden Hilfssatz 4 an: Es existieren

$$(\alpha) \quad (t-s)-(t-p) \text{ Lösungsvektoren, wenn } \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} \leq 0,$$

$$(\beta) \quad (t-s)-(t-p)-1, \text{ wenn } \sum_{v=s+1}^p \varphi_v \varphi_{\bar{v}} - \sum_{v=p+1}^t \varphi_v \varphi_{\bar{v}} > 0 \text{ ist.}$$

Nun ist $\varphi_v = \bar{x}_v$ für $v = s+1, s+2, \dots, p$, $\varphi_v = -\bar{x}_v$ für $v = p+1, \dots, t$. Da für jedes $\varrho \in Q$ stets eine der Ungleichungen

$$\sum_{v=s+1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^t x_v \bar{x}_v \geq 0$$

erfüllt ist und mit den Vektoren $\tilde{x}_{\varrho} = \begin{pmatrix} b_{s+1, \varrho} \\ \vdots \\ b_{t, \varrho} \end{pmatrix} \in V_C^{t-s}$, $\varrho = 1, 2, \dots$

$\dots, r$, erst recht die Vektoren

$$x_{\varrho} = \begin{pmatrix} b_{1, \varrho} \\ \vdots \\ b_{s+1, \varrho} \\ \vdots \\ b_{t, \varrho} \\ \vdots \\ b_{n, \varrho} \end{pmatrix} \in V_C^n, \quad \varrho = 1, 2, \dots, r,$$

mit $b_{v, \varrho} = 0$ für $v = 1, 2, \dots, s, t+1, \dots, n$ linear unabhängig sind, ist jede Quadrik (4.1) überall entweder komplex $(t-p-1)$ -dimensional oder $(p-s-1)$ -dimensional linear geblättert, je nachdem ob $p-s \geq t-p$ oder $p-s \leq t-p$ gilt. Wir fassen zusammen:

Satz 12. Die reelle Quadrik Q des C^n mit einer Gleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon + P(x_1, \dots, x_s, x_{t+1}, \dots, x_n) + \bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_n) \\ + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0, \quad s < p < t, \end{aligned}$$

ist überall auf Q mindestens komplex r -dimensional linear geblättert mit $r = \min(t-p, p-s) - 1$. In allen Punkten $\varrho \in Q$,

die der Bedingung $\sum_{v=s+1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^t x_v \bar{x}_v \geq 0$ für $p-s > t-p$
bzw. der Bedingung $\sum_{v=s+1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^t x_v \bar{x}_v \leq 0$ für $p-s < t-p$
genügen, ist Q komplex $(r+1)$ -dimensional linear geblättert,
vorausgesetzt, sie füllen einen reell $(2n-1)$ -dimensionalen
Teilbereich der Quadrik Q aus.

(b) Von anderer Art ist das folgende Kriterium:

Satz 13. Gegeben sei die reelle Quadrik Q des C^n durch die
Gleichung

$$(4.4) \quad \varphi(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) = \varepsilon + \frac{1}{2}(x_1^2 + \bar{x}_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + \bar{x}_2^2) + P(x_3, \dots, x_n) + \\ + P(\bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{v=1}^p x_v \bar{x}_v - \sum_{v=p+1}^n x_v \bar{x}_v = 0.$$

Q ist in einem Gebiet G mindestens komplex 1-dimensional
linear geblättert, wenn es komplexe $(n-2)$ -Tupel $(u_3, \dots, u_n) \neq$
 $(0, \dots, 0)$ gibt, so daß für alle $\mathcal{U} \in G$

$$(4.5) \quad 1 \cdot \bar{I} + 4 \cdot h \cdot (x_1'^2 + x_1'^2) \leq 0$$

und

$$(4.6) \quad \bar{q} \cdot 1^2 + q \cdot \bar{I}^2 - 2 \cdot 1 \cdot \bar{I} \cdot h - 4(h^2 - q \cdot \bar{q})(x_1'^2 + x_1'^2) = 0$$

gilt, wobei zur Abkürzung

$$q = 2 \sum_{v,\mu=3}^n \varphi_{v\mu} u_v u_\mu, \quad h = \sum_{v,\mu=3}^n \varphi_{v\bar{\mu}} u_v \bar{u}_\mu, \quad 1 = \sum_{v=3}^n \varphi_{vv} u_v$$

gesetzt wurde.

Beweis: Bei einem linearen Ansatz (3.4) erhält man aus (4.4)
die (3.7) entsprechenden Gleichungen für die Unbekannten u_v :

$$\begin{aligned} \text{I. } (x_1 + \bar{x}_1) \cdot u_1 + (x_2 + \bar{x}_2) \cdot u_2 + \sum_{v=3}^n \varphi_{vv} u_v &= 0 \\ \text{II. } \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \sum_{v,\mu=3}^n \varphi_{v\mu} u_v u_\mu &= 0 \\ \text{III. } u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2 + \sum_{v,\mu=3}^n \varphi_{v\bar{\mu}} u_v \bar{u}_\mu &= 0. \end{aligned}$$

Wir verwenden im folgenden die im Satz angegebenen Abkürzun-
gen 1 , q und h . Ohne Einschränkung können wir $x_1' \neq 0$

voraussetzen, und aus I folgt wegen $2x'_1 = x_v + \bar{x}_v$:

$$u_1 = - \frac{2x'_2 u_2 + 1}{2x'_1} ,$$

woraus sich nach Einsetzen in II und III ergibt:

$$(4.7) \quad \text{I.} \quad u_2 + \frac{lu_2 x'_2}{x_1'^2 + x_2'^2} + \frac{l^2 + 4qx_1'^2}{4(x_1'^2 + x_2'^2)} = 0$$

$$\text{II.} \quad u_2 \bar{u}_2 + \frac{1}{2} \frac{l\bar{u}_2 x'_2}{x_1'^2 + x_2'^2} + \frac{1}{2} \frac{l u_2 x'_2}{x_1'^2 + x_2'^2} + \frac{l\bar{l} + 4hx_1'^2}{4(x_1'^2 + x_2'^2)} = 0$$

Statt (4.7) II können wir schreiben:

$$\left(u_2 + \frac{lx'_2}{2(x_1'^2 + x_2'^2)}\right) (\bar{u}_2 + \frac{l x'_2}{2(x_1'^2 + x_2'^2)}) = - \frac{l\bar{l}x_1'^2 + 4hx_1'^2(x_1'^2 + x_2'^2)}{4(x_1'^2 + x_2'^2)^2} .$$

Diese Gleichung hat nur dann Bestand, wenn

$$(4.8) \quad l\bar{l} + 4h(x_1'^2 + x_2'^2) \leq 0$$

ist. Damit ist Bedingung (4.5) bewiesen. (4.7) I ist gleichbedeutend mit

$$\left(u_2 + \frac{lx'_2}{2(x_1'^2 + x_2'^2)}\right)^2 = - \frac{l^2 x_1'^2 + 4qx_1'^2(x_1'^2 + x_2'^2)}{4(x_1'^2 + x_2'^2)^2} .$$

Da die Gleichungen $x\bar{x} = k$, $x^2 = m$ nur dann eine gemeinsame Lösung haben, wenn $k = |m|$ ist, folgt also

$$|l^2 + 4q(x_1'^2 + x_2'^2)| = - (l\bar{l} + 4h(x_1'^2 + x_2'^2)) ,$$

woraus man

$$(4.9) \quad \bar{q}l^2 + q\bar{l}^2 - 2l\bar{l}h - 4(h^2 - q\bar{q})(x_1'^2 + x_2'^2) = 0$$

erhält. Sind aber (4.8) und (4.9) erfüllt, so existiert ein Lösungsvektor $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, und damit ist Satz 13 bewiesen.

Als Anwendungsbeispiel zeigen wir, daß die Quadrik des C^4 mit der Gleichung

$$\frac{1}{2} (x_1^2 + \bar{x}_1^2) + \frac{1}{2} (x_2^2 + \bar{x}_2^2) + x_3 x_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 - x_3 \bar{x}_3 - x_4 \bar{x}_4 = 0$$

überall komplex 1-dimensional linear geblättert ist.

Man findet sofort:

$$l = (x_4 - \bar{x}_3)u_3 + (x_3 - \bar{x}_4)u_4$$

$$h = -u_3\bar{u}_3 - u_4\bar{u}_4$$

$$q = 2u_3u_4 \quad .$$

Bei der Symmetrie von l , h und q ist man geneigt, den Ansatz $u_3 = u_4 e^{i\alpha}$ zu machen. Tut man dies und beachtet, daß u_4 von Null verschieden sein muß, da sonst kein Blätterungsvektor $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ existiert, so kann man den Vektor $\mathcal{U}$ normieren, indem man $u_4 = 1$ setzt. Man errechnet dann:

$$q = h \cdot e^{i(\alpha + \pi)} \quad , \text{ d.h. } q \cdot \bar{q} = h^2 \quad .$$

Bedingung (4.6) ist dann äquivalent mit

$$l = \bar{l} \cdot e^{i(\alpha + \pi)} = -\bar{l} \cdot e^{i\alpha} \quad ,$$

Diese Gleichung ist im vorliegenden Falle für alle $\mathcal{U} \in C^4$, also insbesondere für alle $\mathcal{U}$ der betrachteten Quadrik erfüllt. Es bleibt noch die Ungleichung (4.5) zu untersuchen. Nach kurzer Rechnung erhält man:

$$l \cdot \bar{l} + 4h \cdot (x_1'^2 + x_2'^2) = -((x_3 e^{-i\frac{\alpha}{2}} + \bar{x}_3 e^{i\frac{\alpha}{2}}) - (x_4 e^{i\frac{\alpha}{2}} + \bar{x}_4 e^{-i\frac{\alpha}{2}}))^2.$$

Die rechte Seite ist für alle $\mathcal{U}$ der Quadrik nicht positiv, da sie für alle $\mathcal{U} \in C^4$ nicht positiv ist. Somit ist die Quadrik überall mindestens komplex 1-dimensional linear geblättert.

4.2. m-dimensionale Blätterung von Quadriken des C^{2m} mit $Rg \mathcal{U} = 2m$

Wir wollen in diesem Paragraphen die Gesamtheit der reellen Quadriken Q des C^{2m} ($m \geq 1$) mit $Rg \mathcal{U} = 2m$ bestimmen, die überall oder auf einem Teilgebiet von Q komplex m -dimensional geblättert sind. Nach Satz 1 sind diese Quadriken notwendig vom Typ $H_{m,m}$, und nach Satz 2 sind sie linear geblättert.

Vorgelegt seien also die Quadriken

$$(4.10) \quad \varepsilon + \mathcal{U}^T \mathcal{U} \mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}^T \mathcal{U} \bar{\mathcal{U}} = 0$$

mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^T & \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \varphi^{(m)} & \sigma \\ \sigma & -\varphi^{(m)} \end{pmatrix}$$

wo ϑ_1, ϑ_2 und $\mathcal{R}$ m -reihige Matrizen sind. Außerdem sind ϑ_1 und ϑ_2 Diagonalmatrizen mit $\vartheta_1 \geq 0$ und $\vartheta_2 \leq 0$. Für die m -dimensionale Blätterung einer solchen Quadrik ist nach Satz 8 weiterhin notwendig, daß alle $\mathcal{P}$ eines Gebietes G von Q der Gleichung

$$(4.11) \quad \mathcal{P}^T (4\sigma\mathcal{Y}\bar{\sigma} - \mathcal{Y})\bar{\mathcal{P}} - 2\varepsilon = 0$$

genügen. Diese Gleichung stellt, sofern nicht alle Koeffizienten der Matrix $4\sigma\mathcal{Y}\bar{\sigma} - \mathcal{Y}$ und die Konstante ε verschwinden, wie (4.10) eine Quadrik Q^* des C^{2m} dar, und beide Quadriken Q und Q^* haben genau dann auf einem Teilgebiet von Q einen reell $(4m-1)$ -dimensionalen Durchschnitt, wenn beide Quadriken zusammenfallen. (4.11) ist eine hermitesche Quadrik. Daher stimmt Q^* mit Q höchstens dann überein, wenn $\sigma = \bar{\sigma}$ ist. Dies genügt aber noch nicht, wir müssen $\varepsilon = 0$ verlangen. Damit wird aus (4.10):

$$\sum_{\nu=1}^m x_\nu \bar{x}_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{2m} x_\nu \bar{x}_\nu = 0,$$

und diese Quadrik ist nach Satz 6 überall komplex m -dimensional linear geblättert.

Ist $4\sigma\mathcal{Y}\bar{\sigma} - \mathcal{Y} = \sigma$ und $\varepsilon = 0$, so füllen die Punkte $\mathcal{P}$, die (4.11) genügen, den ganzen C^{2m} aus. Der Durchschnitt von Q mit (4.11) hat daher sicher die reelle Dimension $4m-1$.

Wir wollen zunächst σ aus der Matrixengleichung

$$(4.12) \quad 4\sigma\mathcal{Y}\bar{\sigma} - \mathcal{Y} = \sigma$$

bestimmen und anschließend die Gleichung der so erhaltenen Quadrik auf möglichst einfache Gestalt komplex-linear transformieren.

Mit

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= (\delta_{\nu\mu} t_\nu)_{\nu, \mu=1, \dots, m} = (\delta_{\nu\mu} t_\nu), \quad t_\nu \geq 0, \\ \vartheta_2 &= (-\delta_{\nu\mu} t_{m+\nu})_{\nu, \mu=1, \dots, m} = (-\delta_{\nu\mu} t_{m+\nu}), \quad t_{m+\nu} \geq 0, \\ \mathcal{R} &= (r_{\nu\mu})_{\nu, \mu=1, \dots, m} = (r_{\nu\mu}), \\ \varphi^{(m)} &= (\delta_{\nu\mu})_{\nu, \mu=1, \dots, m} = (\delta_{\nu\mu}) \end{aligned}$$

ist (4.12) wegen der Aufspaltung von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ gemäß (4.10) äquivalent mit

$$(4.13) \quad \begin{aligned} (a) \quad & 4\mathcal{R}_1^2 - 4\mathcal{R}\bar{\mathcal{R}}^T - \mathcal{E}^{(m)} = (-4 \sum_{\nu=1}^m r_{\nu\mu} \bar{r}_{\nu\mu} + \delta_{\nu\mu}(4t_{\nu}^2 - 1)) = 0 \\ (b) \quad & 4\mathcal{R}_1\bar{\mathcal{R}} - 4\mathcal{R}\mathcal{R}_2 = 4(t_{\nu}\bar{r}_{\nu\mu} + t_{m+\mu}r_{\nu\mu}) = 0 \\ (c) \quad & 4\mathcal{R}^T\mathcal{R}_1 - 4\mathcal{R}_2\bar{\mathcal{R}}^T = 4(t_{\nu}\bar{r}_{\nu\mu} + t_{m+\mu}r_{\nu\mu})^T = 0 \\ (d) \quad & -4\mathcal{R}_2^2 + 4\mathcal{R}^T\bar{\mathcal{R}} + \mathcal{E}^{(m)} = (4 \sum_{\nu=1}^m r_{\nu\mu}\bar{r}_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}(4 \cdot t_{m+\nu}^2 - 1)) = 0, \end{aligned}$$

d.h. alle Komponenten dieser Matrizen müssen verschwinden.

Aus den Bedingungen (a) und (d) folgt $|t_{\nu}| \geq \frac{1}{2}$ für $\nu = 1, 2, \dots, 2m$. Daher gilt wegen (b) für alle $r_{\nu\mu} = 0$:

$$\left| \frac{t_{\nu}}{t_{m+\mu}} \right| = \left| -\frac{r_{\nu\mu}}{\bar{r}_{\nu\mu}} \right| = 1,$$

woraus

$$(4.14) \quad t_{\nu} = t_{m+\mu}$$

folgt, da $t_{\nu} > 0$ und $t_{m+\mu} > 0$ ist. Diese Beziehung hat zusammen mit (4.13) (b)

$$r_{\nu\mu} + \bar{r}_{\nu\mu} = 0$$

zur Folge, d.h. die Matrix $\mathcal{R}$ ist rein imaginär; also gilt:

$$(4.15) \quad \mathcal{R} = i\mathcal{R}' = i(r'_{\nu\mu}),$$

wobei die $r'_{\nu\mu}$ reell sind.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{R}'$ von der Gestalt

$$(4.16) \quad \mathcal{R}' = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & \sigma & \dots & \sigma \\ \sigma & \mathcal{R}_1^{(1)} & \dots & \sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma & \sigma & \dots & \mathcal{R}_s^{(1)} \end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{R}_s^{(1)} = \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{U}_s^{(1)}$, $u_s^2 > \frac{1}{4}$, ist, wobei $\mathcal{U}_s^{(1)}$

eine l_s -reihige orthogonale Matrix ist mit $1 \leq l_s \leq m-1$.

Außerdem gilt: $\sum_{s=1}^k l_s = m-1$, $\delta_s = \pm 1$ und $0 \leq l_s \leq m$;

s läuft jeweils von 1 bis s .

Es mögen maximal 1 Zeilen ($0 \leq l_s \leq m$) von $\mathcal{R}'$ existieren, die Nullzeilen sind. Durch Umnummerierung der Variablen $x_1, \dots, x_m$ in der Gleichung (4.10) können wir dann erreichen,

daß die ersten l Zeilen von $\mathcal{R}$ (und damit auch von $\mathcal{R}'$) Nullzeilen sind. Statt (4.13) (d) erhalten wir daher:

$$\sum_{\varrho=l+1}^m r'_{\varrho\nu} r'_{\varrho\mu} = \delta_{\nu\mu} (t_{m+\mu}^2 - \frac{1}{4}), \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, m,$$

und diese Gleichung hat höchstens dann Bestand, wenn $t_{m+\mu} = t_{m+\mu_2} = \dots = t_{m+\mu_\lambda} = \frac{1}{2}$ ist¹⁾. Das hat aber zur Folge, daß mindestens die Spalten $(r'_{\varrho\mu_\lambda})_{\varrho=1,2,\dots,m}$, $\lambda = 1, 2, \dots, l$, Nullspalten sind. Durch Umnummerierung der Variablen $x_{m+1}, \dots, x_{2m}$ in (4.10) erreichen wir, daß die ersten l Spalten der Matrix $\mathcal{R}'$ Nullspalten sind. Wir haben noch zu zeigen, daß es genau l Nullspalten gibt. Wären etwa die ersten $l+1$ Spalten von $\mathcal{R}'$ Nullspalten, so folgte aus (4.13) (a) :

$$\sum_{\varrho=l+2}^m r'_{\nu\varrho} r'_{\mu\varrho} = \delta_{\nu\mu} (t_{\nu}^2 - \frac{1}{4}), \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, m,$$

und es gäbe somit mindestens $l+1$ Nullzeilen. Das ist ein Widerspruch.

Damit hat für $l \neq m$, d.h. $\mathcal{R}' \neq \sigma$, $\mathcal{R}'$ die Gestalt:

$$(4.17) \quad \mathcal{R}' = \begin{pmatrix} \sigma^{(l)} & \sigma \\ \sigma & \mathcal{R}_*^{(m-l)} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{R}_*^{(m-l)}$ nimmt nach einer eventuellen Umnummerierung der Variablen $x_{l+1}, \dots, x_m$ in (4.10) untereinander und der Variablen $x_{m+1}, \dots, x_{2m}$ untereinander die Form an:

$$(4.18) \quad \mathcal{R}_*^{(m-l)} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^{(l_1)} & \dots & \sigma \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ \sigma & \dots & \mathcal{R}_s^{(l_s)} \end{pmatrix},$$

wo s eine der Zahlen $1, 2, \dots, m-l$ ist. Dabei ist kein $\mathcal{R}_s^{(l_s)}$ mehr aufspaltbar von der Art:

$$(4.19) \quad \mathcal{R}_s^{(l_s)} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{s1}^{(l_{s1})} & \sigma \\ \sigma & \mathcal{R}_{s2}^{(l_{s2})} \end{pmatrix}$$

mit $l_{s1} + l_{s2} = l_s$, $l_{s1} \geq 1$, $l_{s2} \geq 1$.

1) Es gibt genau $m-l$ von Null verschiedene Vektoren des reellen linearen Vektorraumes V_R^{m-l} , die paarweise orthogonal sind und eine vorgegebene (positive) Länge haben.

Es gilt nun: $\mathcal{R}_6^{(L_6)} = \delta_6 \sqrt{u_6^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{U}_6^{(L_6)}$, $u_6^2 > \frac{1}{4}$, und $\mathcal{U}_6^{(L_6)}$ ist eine orthogonale Matrix. Wir beweisen diese Aussage für $\delta = 1$. Dann haben wir nur zu zeigen:

$$t_{1+1} = \dots = t_{1+l_1} = u_1 > \frac{1}{2}$$

und

$$t_{m+1+1} = \dots = t_{m+1+l_1} = u_1,$$

da nämlich aus (4.13) (a) :

$$\sum_{\varphi=1}^m r'_{\nu\varphi} r'_{\mu\varphi} = \sum_{\varphi=l+1}^{l+l_1} r'_{\nu\varphi} r'_{\mu\varphi} = \delta_{\nu\mu} (u_1^2 - \frac{1}{4}), \quad \nu, \mu = 1+1, \dots, 1+l_1,$$

und (4.13) (d)

$$\sum_{\varphi=1}^m r'_{\varphi\nu} r'_{\varphi\mu} = \sum_{\varphi=l+1}^{l+l_1} r'_{\varphi\nu} r'_{\varphi\mu} = \delta_{\nu\mu} (u_1^2 - \frac{1}{4}), \quad \nu, \mu = 1+1, \dots, 1+l_1,$$

direkt die Behauptung folgt.

In jeder Zeile von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ gibt es zunächst wenigstens ein von Null verschiedenes Element, sonst wäre die Zahl 1 in (4.17) nicht maximal gewählt. Dann gilt aber:

$$\sum_{\varphi=l+1}^{l+l_1} r'_{\nu\varphi} r'_{\nu\varphi} > 0$$

für $\nu = 1+1, \dots, 1+l_1$, was $t_{\nu}^2 > \frac{1}{4}$ in (4.13) (a) zur Folge hat.

Analog schließt man, daß in jeder Spalte von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ ein von Null verschiedenes Element steht. Durch eventuelle Umnummerierung der Variablen $x_{1+1}, \dots, x_{1+l_1}$ bzw. $x_{m+1+1}, \dots, x_{m+1+l_1}$ in (4.10) je untereinander erreichen wir, daß die Glieder in der Hauptdiagonalen von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ von Null verschieden sind.

Da nun $r'_{1+1, 1+1} \neq 0$ ist, gilt nach (4.14):

$$t_{1+1} = t_{m+1+1}.$$

Nennen wir diesen gemeinsamen Wert u_1 , so ist, sofern $l_1 = 1$ ist, die Behauptung bewiesen. Ist $l_1 > 1$, so gelte bereits für die ersten k Zeilen und die ersten k Spalten von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ ($1 \leq k < l_1$):

$$t_{1+1} = \dots = t_{1+k} = u_1$$

und

$$t_{m+1+1} = \dots = t_{m+1+k} = u_1.$$

In wenigstens einer der ersten k Zeilen bzw. der ersten k Spalten von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ gibt es ein Element $r'_{x, k+1} \neq 0$ bzw. $r'_{k+1, x} \neq 0$, $1 \leq x \leq k$. Ansonsten wäre $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ in der Art von (4.19) entgegen Voraussetzung aufspaltbar. Dann gilt aber wegen $r'_{x, x} \neq 0$, $r'_{k+1, k+1} \neq 0$ und (4.14):

$$u_1 = t_x = t_{m+x} = t_{m+k+1} = t_{k+1}.$$

Für alle Zeilen und Spalten von $\mathcal{R}_1^{(L_1)}$ ist also:

$$u_1 = t_{1+\lambda_1} = t_{m+1+\lambda_1}, \lambda_1 = 1, 2, \dots, l_1.$$

Damit ist $\mathcal{R}'$ von der Gestalt (4.16).

Man beachte, daß in (4.10) $\mathcal{U}_j$ seine Form beibehalten hat, da jeweils nur Ummumerierungen von $x_1, \dots, x_m$ oder $x_{m+1}, \dots, x_{2m}$ je untereinander vorgenommen wurden. $\mathcal{J}$ besitzt die Darstellung:

$$(4.20) \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{U}^{(L_1)} & \sigma & \dots & \sigma & \sigma^{(L_1)} & \sigma & \dots & \sigma \\ \sigma & \mathcal{R}_1^{(L_1)} & \dots & \sigma & \sigma & i\mathcal{R}_1^{(L_1)} & \dots & \sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma & \sigma & \dots & \mathcal{U}_s^{(L_s)} & \sigma & \sigma & \dots & i\mathcal{R}_s^{(L_s)} \\ \sigma^{(L_1)} & \sigma & \dots & \sigma & -\frac{1}{2}\mathcal{U}^{(L_1)} & \sigma & \dots & \sigma \\ \sigma & i\mathcal{R}_1^{(L_1)T} & \dots & \sigma & \sigma & -\mathcal{R}_1^{(L_1)} & \dots & \sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma & \sigma & \dots & i\mathcal{R}_s^{(L_s)T} & \sigma & \sigma & \dots & -\mathcal{R}_s^{(L_s)} \end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{U}_s^{(L_s)} = u_s \mathcal{U}^{(L_s)}$, $\mathcal{R}_s^{(L_s)} = \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{U}_s^{(L_s)}$, $u_s > \frac{1}{2}$, $\delta_s = \pm 1$,

wobei $\mathcal{U}_s^{(L_s)}$ eine l_s -reihige reelle orthogonale Matrix ist,

$s = 1, 2, \dots, s$. Es gilt ferner: $0 \leq l \leq m$, $l_s \geq 1$, $\sum_{s=1}^s l_s = m - 1$.

Im folgenden setzen wir: $k_0 = 1$ und $k_s = 1 + \sum_{q=1}^s l_q$, $s = 1, \dots, s$. Durch die komplex-lineare Transformation des $\mathbb{C}^n$:

$$y_v = x_v, \quad v = 1, 2, \dots, l; m+1, m+2, \dots, m+1,$$

$$\begin{pmatrix} y_{16} \\ y_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(L_s)} & \sigma \\ \sigma & \mathcal{U}_s^{(L_s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{16} \\ x_{26} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, s,$$

mit

$$x_{16} = \begin{pmatrix} x_{k_{s-1}+1} \\ \vdots \\ x_{k_s} \end{pmatrix}, \quad x_{26} = \begin{pmatrix} x_{m+k_{s-1}+1} \\ \vdots \\ x_{m+k_s} \end{pmatrix}$$

und der analogen Aufspaltung von η_{16} und η_{26} geht (4.10) in eine Gleichung

$$\eta_j^T \sigma^* \eta_j + \bar{\eta}_j^T \bar{\sigma}^* \bar{\eta}_j + \eta_j^T \eta_j^* \bar{\eta}_j = 0$$

über. Dabei gilt $\eta_j^* = \eta_j$, da aus der Orthogonalität von $u_s^{(e)}$

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & u_s^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & -\varphi^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & u_s^{(e)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & -\varphi^{(e)} \end{pmatrix}$$

folgt. Die Matrix σ^* ist von der Gestalt (4.20), nur sind jetzt die $u_s^{(e)}$ durch die Einheitsmatrizen $\varphi^{(e)}$ ersetzt. Es gilt nämlich:

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & u_s^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \varphi^{(e)} & i \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} u_s^{(e)} \\ i \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} u_s^{(e)T} & -u_s \varphi^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(e)} & \sigma \\ \sigma & u_s^{(e)T} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_s \varphi^{(e)} & i \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} \varphi^{(e)} \\ i \delta_s \sqrt{u_s^2 - \frac{1}{4}} \varphi^{(e)} & -u_s \varphi^{(e)} \end{pmatrix}.$$

Vermöge einer weiteren nicht-singulären Transformation des C^n :

$$z_\nu = y_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, l; m+1, m+2, \dots, m+l,$$

$$z_{\nu_6} = \sqrt{u_s + \frac{1}{2}} y_{\nu_6} + i \delta_s \sqrt{u_s - \frac{1}{2}} y_{m+\nu_6},$$

$$z_{m+\nu_6} = i \sqrt{u_s - \frac{1}{2}} y_{\nu_6} - \delta_s \sqrt{u_s + \frac{1}{2}} y_{m+\nu_6},$$

$$\nu_6 = k_{s-1}+1, \dots, k_s, \quad s = 1, \dots, s,$$

die die hermitesche Form ebenfalls invariant läßt, wie eine einfache Rechnung bestätigt, geht (4.10) schließlich in

$$(4.21) \quad \bar{z}^T \sigma_N z + \bar{z}^T \bar{\sigma}_N \bar{z} + \bar{z}^T \eta_j \bar{z} = 0$$

über. σ_N hat dabei die Gestalt:

$$\sigma_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varphi^{(m)} & \sigma \\ \sigma & -\frac{1}{2} \varphi^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Denn den quadratischen analytischen Anteil der Gleichung
 $\eta^T \sigma^* \eta + \bar{\eta}^T \bar{\sigma}^* \bar{\eta} + \eta^T \eta \bar{\eta} = 0$ können wir vermöge der obigen
 Transformation wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \eta^T \sigma^* \eta &= \sum_{\lambda=1}^l (y_{\lambda}^2 - y_{m+\lambda}^2) \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^b \sum_{\nu_0=k_{\sigma-1}+1}^{k_{\sigma}} (u_{\sigma} y_{\nu_0}^2 + 2i \delta_{\sigma} \sqrt{u_{\sigma}^2 - \frac{1}{4}} y_{\nu_0} y_{m+\nu_0} - u_{\sigma} y_{m+\nu_0}^2) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^l (y_{\lambda}^2 - y_{m+\lambda}^2) \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^b \sum_{\nu_0=k_{\sigma-1}+1}^{k_{\sigma}} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{u_{\sigma} + \frac{1}{2}} y_{\nu_0} + i \delta_{\sigma} \sqrt{u_{\sigma} - \frac{1}{2}} y_{m+\nu_0} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(i \sqrt{u_{\sigma} - \frac{1}{2}} y_{\nu_0} - \delta_{\sigma} \sqrt{u_{\sigma} + \frac{1}{2}} y_{m+\nu_0} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m'} (z_{\mu}^2 - z_{m+\mu}^2) . \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage:

Satz 14. Unter allen Quadriken des G^{2m} mit $\operatorname{Rg} \eta_{\eta} = 2m$ sind
 höchstens diejenigen komplex m -dimensional geblättert, die
 sich auf eine der beiden Normalformen

$$(a) \quad \sum_{\nu=1}^m x_{\nu} \bar{x}_{\nu} - \sum_{\nu=m+1}^{2m} x_{\nu} \bar{x}_{\nu} = 0 ,$$

$$(b) \quad \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{1}{2} (x_{\nu}^2 + \bar{x}_{\nu}^2) + x_{\nu} \bar{x}_{\nu} \right) - \sum_{\nu=m+1}^{2m} \left(\frac{1}{2} (x_{\nu}^2 + \bar{x}_{\nu}^2) + x_{\nu} \bar{x}_{\nu} \right) = 0$$

komplex-linear transformieren lassen. Diese sind aber überall
 m -dimensional komplex-linear geblättert.

Zu beweisen bleibt noch die Aussage über das Blätterungsverhalten der Quadrik mit der Gleichung (b). Statt (b) können wir schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2} [(x_{\nu} + \bar{x}_{\nu})^2 - (x_{m+\nu} + \bar{x}_{m+\nu})^2] = \sum_{\nu=1}^m 2(x_{\nu}^2 - x_{m+\nu}^2) = 0 .$$

Betrachten wir also die Gleichung (b) im $R^{4m}(x_1', \dots, x_{2m}'')$, dem dem $C^{2m}(x_1, \dots, x_{2m})$ zugeordneten reellen Raum, so erkennt man, daß durch jeden Punkt der Quadrik eine maximal reell $3m$ -dimensionale reell-lineare Mannigfaltigkeit geht ([1], 128 f.). Dann brauchen wir nur den im nächsten Paragraphen 4.3 bewiesenen Satz 15 anzuwenden, der in unserem Falle besagt, daß die Quadrik mit der Gleichung (b) überall komplex m -dimensional linear geblättert ist. Damit ist Satz 14 bewiesen.

Satz 14 können wir noch umformulieren. Wir sahen, daß die Bedingung (4.11) notwendig war; es ergab sich, daß sie auch hinreichend ist. Also haben wir

Satz 14a. Eine Quadrik Q des C^{2m} mit einer Gleichung (4.10) und $Rg \mathfrak{g} = 2m$ ist dann und nur dann in einem Gebiet G von Q komplex m -dimensional linear geblättert, wenn alle $e \in G$ der Gleichung

$$e^T(4\sigma\mathfrak{g}\bar{e} - \mathfrak{g})\bar{e} - 2e = 0$$

genügen.

Wir sahen, daß Q überall m -dimensional linear geblättert ist. Die Blätterung läßt sich also von jedem Teilgebiet G von Q auf ganz Q fortsetzen.

Aus Satz 14 folgt insbesondere, daß die einzigen geblätterten Quadriken des C^2 mit $Rg \mathfrak{g} = 2$ die Normalformen

$$x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + \bar{x}_1^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + \bar{x}_2^2) + x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 = 0$$

besitzen.

4.3. Reell-geometrische Blätterungsbedingungen

Die folgenden Kriterien gelten nicht nur für Quadriken, sondern allgemein für reelle Hyperflächen des C^n . Wir beweisen zunächst:

Satz 15. Eine reelle stetig differenzierbare Hyperfläche H des G^n mit einer definierenden Gleichung

$$(4.22) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

besitze auf einem reell $(2n-1)$ -dimensionalen Gebiet G von H die Eigenschaft, sich dort als reell $(n-r-1)$ -parametrische Schar ($r \geq 1$) reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n+r$ darstellen zu lassen¹⁾. Dann ist H in G mindestens komplex r -dimensional linear geblättert.

Beweis: Die Hyperfläche (4.22) habe im R^{2n} die Darstellung

$$(4.23) \quad \varphi^*(x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n) = 0.$$

Sie läßt sich nach Voraussetzung in G in der Form

$$(4.24) \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_0 \\ \varphi''_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L}'(u_1, \dots, u_{n-r-1}) \\ \mathcal{L}''(u_1, \dots, u_{n-r-1}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}$$

darstellen, wo $\mathcal{L}'(u_1, \dots, u_{n-r-1})$ und $\mathcal{L}''(u_1, \dots, u_{n-r-1})$ jeweils Matrizen mit n Zeilen und $n+r$ Spalten sind. $\mathbf{A}$ durchläuft alle $(n+r)$ -reihigen reellen Spaltenvektoren. Außerdem hängen die Komponenten der Matrizen $\mathcal{L}'(u_1, \dots, u_{n-r-1})$ und $\mathcal{L}''(u_1, \dots, u_{n-r-1})$ stetig differenzierbar von $u_1, \dots, u_{n-r-1}$

ab. Weiter gilt überall in G : $\text{Rg} \begin{pmatrix} \mathcal{L}'(u_1, \dots, u_{n-r-1}) \\ \mathcal{L}''(u_1, \dots, u_{n-r-1}) \end{pmatrix} = n+r$.

1) Das bedeutet, daß (4.22) für alle $\varphi, \varphi_0 \in G$ eine stetig

differenzierbare Darstellung $\begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_0 \\ \varphi''_0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{\nu=1}^{n+r} \varphi'_\nu(u_1, \dots, u_{n-r-1}) t_\nu \right) \begin{pmatrix} \varphi'_0 \\ \varphi''_0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{\nu=1}^{n+r} \varphi''_\nu(u_1, \dots, u_{n-r-1}) t_\nu \right) \begin{pmatrix} \varphi'_0 \\ \varphi''_0 \end{pmatrix}$

mit $\text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi'_\nu}{\partial t_\mu} & \frac{\partial \varphi'_\nu}{\partial u_\lambda} \\ \frac{\partial \varphi''_\nu}{\partial t_\mu} & \frac{\partial \varphi''_\nu}{\partial u_\lambda} \end{pmatrix} = 2n-1$ überall in G besitzt.

Schreiben wir Gleichung (4.23) komplex, so erhalten wir Gleichung (4.22), und (4.24) geht über

$$(4.25) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_{n-r-1}) \cdot \mathcal{L} + \mathcal{L}_0$$

mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + i\mathcal{L}''$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + i\mathcal{L}''$. $\mathcal{L}$ hängt natürlich auch stetig differenzierbar von $u_1, \dots, u_{n-r-1}$ ab. Der (komplexe) Rang der Matrix $\mathcal{L}$ ist überall in G kleiner oder gleich n , da $\mathcal{L}$ nur n Zeilen, aber $n+r$ Spalten besitzt. Daher besteht nach ([7], 119) bei fest gehaltenen $u_1, \dots, u_{n-r-1}$ die lineare Mannigfaltigkeit (4.25) aus einer reell $(n-r)$ -parametrischen Schar zueinander paralleler analytischer Ebenen mindestens von der komplexen Dimension r . Nach ([7], 120) hat die durch einen beliebigen Punkt $\mathcal{L}_0$ der linearen Mannigfaltigkeit (4.25) verlaufende analytische Ebene die Darstellung

$$(4.26) \quad \mathcal{L} = \sum_{v=1}^k z_v \cdot \mathcal{L}_v(u_1, \dots, u_{n-r-1}) + \mathcal{L}_0,$$

wo $\mathcal{L}_v = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}_v$, $v = 1, 2, \dots, r$, ist und die $\mathcal{L}_v$ r komplex linear unabhängige Lösungsvektoren des Gleichungssystems $\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = \sigma$ sind, die auf Grund der Rangbeziehungen stets existieren. Variieren wir die $u_1, \dots, u_{n-r-1}$, so sind auf Grund ihrer Konstruktion die Vektoren $\mathcal{L}_v$ in den $u_1, \dots, u_{n-r-1}$ stetig differenzierbar, und durch jeden Punkt $\mathcal{L}_0 \in G$ verläuft eine komplex r -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit (4.26). Damit ist Satz 15 bewiesen.

Wir bringen einige Beispiele. Von den Quadriken

$$(4.27) \quad \sum_{v=1}^p (t_v(x_v^2 + \bar{x}_v^2) + x_v \bar{x}_v) - \sum_{v=p+1}^n (t_v(x_v^2 + x_v^2) + x_v \bar{x}_v) = 0$$

mit $2p \geq n+1$ und $t_v > 0$, $v = 1, 2, \dots, n$, sind nach dem Beispiel im Anschluß an Satz 8 höchstens diejenigen überall komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, für die $t_v \geq \frac{1}{2}$, $v = 1, 2, \dots, p$, und $0 < t_v \leq \frac{1}{2}$, $v = p+1, \dots, n$, gilt. Wir schreiben (4.27) reell:

$$(4.28) \quad \sum_{\nu=1}^p ((2t_{\nu}+1) x_{\nu}^2 + (1-2t_{\nu}) x_{\nu}^2) - \\ - \sum_{\nu=p+1}^m ((2t_{\nu}+1) x_{\nu}^2 + (1-2t_{\nu}) x_{\nu}^2) = 0 .$$

Im reellen m -dimensionalen projektiven Raum P^m sind die linearen Räume maximaler Dimension auf einer Quadrik mit der Normalform

$$u_1^2 + \dots + u_s^2 - u_{s+1}^2 - \dots - u_t^2 = 0, \quad 2s \geq t, \quad t \leq m+1,$$

$(m-s)$ -dimensional ([1], 128 f.). Daraus erhalten wir unmittelbar: Ist der Rang der quadratischen Form (4.28) $2n-k$ und ist l_1 die Anzahl der positiven, l_2 die Anzahl der negativen Glieder von (4.28), so wählen wir $l = \max(l_1, l_2)$, und die Quadrik (4.28) ist $(l-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n-l$.

Ist demnach in (4.27) $t_{\nu} + \frac{1}{2}$ für alle ν , so ist der Rang der quadratischen Form (4.28) $2n$, und man erhält: $l = 2n-p$. Satz 15 ist zwar nicht anwendbar, jedoch gilt wegen der genannten Einschränkungen für die t_{ν} : (4.27) ist höchstens dann komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn sie $(2n-p-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten mindestens von der Dimension p ist. So muß etwa durch jeden Punkt der Quadrik (4.27) vom Typ $H_{n-1,1}$ eine reelle $(n-1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit verlaufen.

Gilt für mindestens zwei Indizes ν_1 und ν_2 , $\nu_1 + \nu_2$, $t_{\nu_1} = t_{\nu_2} = \frac{1}{2}$, so ist der Rang von (4.28) höchstens $2n-2$; l ist kleiner oder gleich $n-1$. Nach den obigen Überlegungen geht dann durch jeden Punkt der Quadrik eine reelle lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$, und nach Satz 15 ist die quadratische Hyperfläche (4.27) überall mindestens komplex 1-dimensional linear geblättert. Ferner stellen wir fest: Eine Quadrik des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$ mit einer definierenden Gleichung (4.27) ist überall maximal komplex $(n-p)$ -dimensional geblättert, wenn $t_{\nu} \geq \frac{1}{2}$,

für $v = 1, 2, \dots, p$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$ für $v = p+1, \dots, n$ ist und mindestens $2(n-p)$ der Konstanten t_v den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen. Denn sind s ($2(n-p) \leq s \leq n$) der Konstanten t_v in (4.27) gleich $\frac{1}{2}$, so hat der Rang der quadratischen Form (4.28) den Wert $2n-s$. Man erkennt weiter, daß für die genannten $s-1$ gleich p wird. Damit ist (4.27) $(p-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n-p$. Die Behauptung folgt dann direkt aus Satz 15 und Satz 1.

Aus Satz 15 folgt

Satz 16. Eine singularitätenfreie stetig differenzierbare reelle Fläche des $R^n(x'_1, \dots, x'_n)$

$$(4.29) \quad \varphi(x'_1, \dots, x'_n) = 0$$

sei $(n-s-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension s ($s \geq 1$). Dann stellt (4.29) im $C^n(x_1, \dots, x_n)$ eine mindestens komplex s -dimensional linear geblätterte reelle Hyperfläche dar.¹⁾

Beweis: Durch jeden Punkt der Fläche F mit der Gleichung (4.29), aufgefaßt als Fläche des $R^{2n}(x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n)$, existiert eine $(n+s)$ -dimensionale reelle lineare Mannigfaltigkeit, die ganz in F verläuft. Dann ist (4.29), aufgefaßt als reelle Hyperfläche im $C^n(x_1, \dots, x_n)$, nach Satz 15 komplex s -dimensional linear geblättert.

Beispielsweise folgt aus Satz 16 unmittelbar die $(n-p)$ -dimensionale komplex-lineare Blätterung von Quadriken Q des Typs $H_{p, n-p}$, $2p \geq n+1$, mit den Gleichungen

$$\frac{1}{2} \sum_{v=1}^p (x_v^2 + \bar{x}_v^2 + 2x_v \bar{x}_v) - \frac{1}{2} \sum_{v=p+1}^n (x_v^2 + \bar{x}_v^2 + 2x_v \bar{x}_v) - 2\varepsilon = 0,$$

$\varepsilon \leq 0$. Denn schreibt man ihre Gleichungen reell:

$$\sum_{v=1}^p x_v'^2 - \sum_{v=p+1}^n x_v'^2 - \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = 0, -1,$$

so erkennt man sofort, daß durch jeden Punkt von Q , aufgefaßt als Quadrik des $R^n(x'_1, \dots, x'_n)$ eine reelle lineare Mannigfaltig-

1) Vgl. [4], Satz 8

keit der Dimension $n-p$ geht.

Weiter gilt die folgende Aussage:

Satz 17. Eine stetig differenzierbare Hyperfläche des R^{2n} , die $(n-r-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n+r$ ($r \geq 1$) ist, ist bezüglich jeder komplexen Vektorraum-Struktur des R^{2n} mindestens komplex r -dimensional linear geblättert.

Beweis¹⁾: Geht man von einer Vektorraum-Struktur des R^{2n} zu einer neuen Vektorraum-Struktur des R^{2n} über, so bedeutet dies nach den Ausführungen zu Beginn von 1.2 (Fußnote) eine reell-lineare Koordinatentransformation, die nicht komplex-linear ist. Die komplex-analytische r -dimensionale lineare Blätterung der Hyperfläche H bei sämtlichen komplexen Strukturen des R^{2n} ist daher äquivalent damit, daß bei fest vorgegebener komplexer Struktur alle Hyperflächen H^* komplex-analytisch r -dimensional geblättert sind, die man aus H durch reell-lineare Abbildungen gewinnt. Mit H ist jedoch jede dieser Flächen H^* $(n-r-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n+r$ und damit nach Satz 15 komplex r -dimensional linear geblättert.

Für quadratische Hyperflächen des R^{2n} können wir die folgende Einzigkeitsaussage machen:

Satz 18. Bezüglich einer festen komplexen Vektorraum-Struktur des R^{2n} sei eine Quadrik Q vom Typ $H_{p,n-p}$. Q ist dann und nur dann bei jeder komplexen Vektorraum-Struktur des R^{2n} komplex $(n-p)$ -dimensional (linear) geblättert, wenn Q $(p-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n-p$ ist.

Beweis: Die eine Richtung ist eine Anwendung von Satz 17 auf quadratische Hyperflächen des R^{2n} .

Um die andere Richtung zu beweisen, genügt es (nach dem Beweis

1) Vgl. [4], Beweis zu Satz 9

zu Satz 17) zu zeigen, daß es bei fest vorgegebener komplexer Struktur unter allen Quadriken Q^* des R^{2n} , die aus Q durch reell-lineare Abbildungen hervorgehen, wo Q $(n-s-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n+s$, $-n \leq s < n-p$, ist, wenigstens eine gibt, die nicht $(n-p)$ -dimensional geblättert ist. Die Quadrik des $R^{2n}(x_1^*, \dots, x_{2n}^*)$

$$(4.30) \quad \sum_{v=1}^{n-s} x_v^{*2} = 0, \quad -n \leq s < n-p,$$

ist eine $(n-s-1)$ -parametrische Schar reeller linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n+s$. Die feste komplexe Struktur sei durch die Definition $x_v = x_v^* + i x_{n+v}^*$, $v = 1, 2, \dots, n$, im R^{2n} eingeführt. Im dadurch erhaltenen komplexen Raum C^n kann man (4.30) wie folgt schreiben:

$$(a) \quad \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n-s} (x_v^2 + \bar{x}_v^2) + \sum_{v=1}^{n-s} x_v \bar{x}_v = 0, \quad \text{falls } s \geq 0,$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} \sum_{v=t+1}^n (x_v^2 + \bar{x}_v^2) + \sum_{v=1}^t x_v \bar{x}_v = 0, \quad \text{falls } s = -t < 0$$

ist. Quadrik (4.30) ist bezüglich der vorgegebenen komplexen Struktur also entweder vom Typ $H_{n,0}$ (b) und nach Satz 1 nirgends geblättert oder vom Typ $H_{n-s,0}$ (a) und damit nach den Sätzen 1 und 5 genau s -dimensional geblättert. Aus $s < n-p$ folgt die Behauptung.

Kapitel 5. Bemerkungen zur nicht-linearen Blätterung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der nicht-linearen Blätterung von reellen Quadriken des C^n befassen. Daß es reelle Quadriken des C^n gibt, die komplex, jedoch nicht komplex-linear geblättert sind, sieht man am Beispiel der unzerlegbaren reellen quadratischen Hyperflächen des C^n vom Typ $H_{0,0}$. Da wir das Blätterungsverhalten von reellen Quadriken des C^n vom Typ $H_{p,r-p}$ mit $r < n$ kennen (s. Kap. 2), können wir uns auf Quadriken des Typs $H_{p,n-p}$, $p < n$, beschränken.

Gegeben sei also die Quadrik Q des C^n vom Typ $H_{p,n-p}$ mit der Gleichung

$$(5.1) \quad \varepsilon + \varepsilon^T \sigma \varepsilon + \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} + \varepsilon^T \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} = 0,$$

die gemäß 1.2 vereinfacht sei. Nach den Sätzen 1 und 2 kann nicht-lineare Blätterung nur auftreten, wenn $p \leq n-2$ ist.

Von der Quadrik Q setzen wir voraus, sie sei nicht komplex s -dimensional linear geblättert. Wir untersuchen, ob Q in einem nicht-singulären Punkte ε_0 eine komplexe Blätterung der Gestalt (mit s linear unabhängigen Vektoren β_g)

$$(5.2) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{g=1}^s \beta_g \left(\sum_{(v_1, \dots, v_k) \neq (0, \dots, 0)} a_{v_1 \dots v_k}^g z_1^{v_1} \dots z_k^{v_k} \right)$$

aufweisen kann. Die s Potenzreihen $\sum_{(v_1, \dots, v_k) \neq (0, \dots, 0)} a_{v_1 \dots v_k}^g z_1^{v_1} \dots z_k^{v_k}$,

von denen wenigstens eine nicht-linear in den z_v sein soll, seien dabei fest vorgegeben; in einer Umgebung des Nullpunktes des $C^k(z_1, \dots, z_k)$ seien sie absolut und kompakt konvergent.

Aus Satz 1 folgt zunächst $s \leq n-p$, und nach den Ausführungen am Ende des Paragraphen 2.1 muß $k < s$ sein. Setzt man (5.2) in (5.1) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich die folgenden notwendigen Bedingungen:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (a) \quad & (2\sigma\varepsilon_0 + \beta_g \bar{\varepsilon}_0)^T \sum_{g=1}^s \beta_g a_{v_1 \dots v_k}^g + \\ & \sum_{g \geq h=1}^s \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k + \beta_1 \dots \beta_k = v_1 \dots v_k} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^g a_{\beta_1 \dots \beta_k}^h (2 - \delta_{gh}) \beta_g^T \sigma \beta_h = 0 \\ (b) \quad & a_{v_1 \dots v_k}^g \bar{a}_{\mu_1 \dots \mu_k}^h \beta_g^T \bar{\beta}_h = 0. \end{aligned}$$

Sie müssen für alle k -Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen mit Ausnahme des Nulltupels erfüllt sein. Diese Bedingungen sind auch hinreichend, wenn sie nicht nur für ein festes $\mathcal{A} \in \mathbb{Q}$, etwa $\mathcal{A}_0$, sondern für alle $\mathcal{A}$ einer offenen hinreichend kleinen Flächenumgebung von $\mathcal{A}_0$ gelten (s. auch 3.1). Im folgenden denken wir uns $\mathcal{A}_0$ in diesem Sinne variabel.

Wir können voraussetzen, daß keine der s Potenzreihen die Funktion $f(z_1, \dots, z_k) \equiv 0$ repräsentiert, d.h. unter den Koeffizienten $a_{v_1 \dots v_k}^{\mathcal{A}}$ gibt es für jedes $\mathcal{A} = 1, 2, \dots, s$ wenigstens einen, der von Null verschieden ist. Dann ist aber Gleichung (5.3) (b) äquivalent mit

$$(5.4) \quad \mathcal{B}_\varphi^T \mathcal{A}_\varphi \bar{\mathcal{B}}_\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A} = 1, 2, \dots, s,$$

und diese ist nach Hilfssatz 1 durch s linear unabhängige Vektoren zu erfüllen.

Wenden wir uns also der Gleichung (5.3) (a) zu. Die Ausdrücke $(2\sigma\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\varphi \bar{\mathcal{A}}_0)^T \mathcal{B}_\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_\varphi^T \sigma \mathcal{B}_\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \geq \varphi$, $\varphi, \mathcal{A} = 1, 2, \dots, s$, in denen die gesuchten Blätterungsvektoren auftreten, fassen wir als komplexe Unbekannte $x_\mathcal{A}$ und $x_{\varphi\mathcal{A}}$ auf. Dadurch erhalten wir ein homogenes lineares Gleichungssystem in den $\frac{s(s+3)}{2}$ Unbekannten $x_\mathcal{A}$, $x_{\varphi\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \geq \varphi$, $\varphi, \mathcal{A} = 1, 2, \dots, s$, das unter Umständen aus unendlich vielen Gleichungen besteht. Es existieren genau dann nichttriviale Lösungen $x_\mathcal{A} \neq 0$ und $x_{\varphi\mathcal{A}} \neq 0$, wenn für je $\frac{1}{2}s(s+3)$ Gleichungen die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix verschwindet. Verschwindet eine dieser Determinanten nicht, so folgt:

$$\begin{aligned} (2\sigma\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\varphi \bar{\mathcal{A}}_0)^T \mathcal{B}_\mathcal{A} &= 0, \quad \mathcal{A} = 1, 2, \dots, s, \\ \mathcal{B}_\varphi^T \sigma \mathcal{B}_\mathcal{A} &= 0, \quad \varphi \leq \mathcal{A}, \varphi, \mathcal{A} = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

und dies sind zusammen mit (5.4) genau die Bedingungen für die komplex s -dimensionale lineare Blätterung von $\mathbb{Q}$. Nach Voraussetzung sollte $\mathbb{Q}$ jedoch nicht von dieser Art geblättert sein. Damit haben wir:

Notwendig dafür, daß (5.2) Blätterungsmannigfaltigkeit von $\mathbb{Q}$ (5.1) ist, ist das Verschwinden aller $\frac{1}{2}s \cdot (s+3)$ -reihigen Determinanten, deren Elemente die Koeffizienten von je $\frac{1}{2}s \cdot (s+3)$

Gleichungen des Systems (5.3) (a) mit den Unbekannten $(2\sigma e_0 + \rho_j \bar{e}_0)^T \rho_j, \rho_j^T \sigma \rho_j, \delta \geq \rho, \rho, \delta = 1, 2, \dots, s$, sind.

In der Praxis ist es von Vorteil, diese Aussage durch eine einfachere zu ersetzen. Wir sagen, $(v_1, \dots, v_k)$ kommt lexikographisch vor $(\mu_1, \dots, \mu_k)$, wenn an der ersten Stelle x (von links nach rechts gelesen), an der sich beide Tupel voneinander unterscheiden, $v_x < \mu_x$ gilt. Die Anzahl der Gleichungen (5.3) (a) mit $\sum_{t=1}^k v_t = t, t = 1, 2, \dots$, ist $\binom{k-1+t}{t}$, wie man mühelos nachrechnet. Wir ordnen nun die Gleichungen (5.3) (a) so, daß die zu jedem t gehörigen Gleichungen lexikographisch geordnet sind und t nacheinander alle natürlichen Zahlen durchläuft. Sodann wähle man die Koeffizienten der ersten $\frac{s(s+3)}{2} - 1$ Gleichungen als die ersten Zeilen einer $(\frac{s(s+3)}{2})$ -reihigen Matrix und nehme als noch fehlende Zeile jeweils die Koeffizienten der $(\frac{s(s+3)}{2} + \delta)$ -ten Gleichung, $\delta = 0, 1, 2, \dots$. Wir erhalten dadurch eine Folge von Matrizen, und es gilt: (5.2) ist höchstens dann Blätterungsmannigfaltigkeit von (5.1), wenn die Determinanten all dieser Matrizen verschwinden.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Quadrik Q genau dann komplex k -dimensional von der Form (5.2) geblättert, wenn die ersten $\frac{s(s+3)}{2} - 1$ Gleichungen für alle e einer offenen Flächenumgebung von e_0 lösbar und die s Lösungsvektoren ρ_j linear unabhängig sind.

Setzen wir nicht voraus, daß die s Potenzreihen in (5.2) fest vorgegeben sind, so erhält man aus den genannten notwendigen Bedingungen Aussagen über die Koeffizienten der Potenzreihen. Wir wollen dies am Spezialfall der reellen Quadriken des G^n vom Typ $H_{n-2,2}$, $n \geq 4$, demonstrieren.

(5.1) sei die Gleichung einer Quadrik Q vom Typ $H_{n-2,2}$, die nicht komplex 2-dimensional geblättert sei. Nach den Ausführungen im Anschluß an Satz 1 genügt es, bei der Untersuchung von Q auf nicht-lineare Blätterung den Ansatz zu machen:

$$(5.5) \quad e = e_0 + \rho_1 z + \rho_2 \sum_{v=1}^{\infty} t_v z^v.$$

Setzen wir (5.5) in (5.1) ein, so gelangen wir durch Koeffizientenvergleich zu dem System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (z) \quad & (2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_1 + t_1 (2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_2 = 0 \\
 (z^2) \quad & \bar{e}_1^T \sigma \bar{e}_1 + 2t_1 (\bar{e}_1^T \sigma \bar{e}_2) + t_1^2 (\bar{e}_2^T \sigma \bar{e}_2) + t_2 (2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_2 = 0 \\
 (z^3) \quad & 2t_2 (\bar{e}_1^T \sigma \bar{e}_2) + 2t_1 t_2 (\bar{e}_2^T \sigma \bar{e}_2) + t_3 (2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_2 = 0 \\
 & \vdots \\
 (z^k) \quad & 2t_{k-1} (\bar{e}_1^T \sigma \bar{e}_2) + \sum_{v=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (2 - \delta_{v, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}) t_v t_{k-v} (\bar{e}_2^T \sigma \bar{e}_2) + \\
 & \quad + t_k (2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_2 = 0 \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von z^{k-1} , $k \geq 1$, $1 \geq 1$, können wir für unsere Zwecke außer Acht lassen. Dieses System ist in der oben beschriebenen Weise geordnet.

Betrachten wir die Gleichungen (z^k) mit $k \geq 3$ und fassen wir die Ausdrücke $\bar{e}_1^T \sigma \bar{e}_2$, $\bar{e}_2^T \sigma \bar{e}_2$ und $(2\sigma e_0 + y_j \bar{e}_0)^T \bar{e}_2$ als Unbekannte auf, so sind diese dann und nur dann von Null verschieden, wenn gilt:

$$(5.6) \quad D_k = \begin{vmatrix} 2t_2 & 2t_1 t_2 & t_3 \\ 2t_3 & 2t_1 t_3 + t_2^2 & t_4 \\ 2t_{k-1} & \sum_{v=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (2 - \delta_{v, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}) t_v t_{k-v} & t_k \end{vmatrix} = 0$$

für $k = 5, 6, \dots$. Rechnet man diese Determinante aus und löst dann (5.6) nach $t_2^3 t_k$ auf, so erhält man:

$$(5.7) \quad t_2^3 t_k = \sum_{v=2}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (2 - \delta_{v, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}) t_v t_{k-v} (t_2 t_4 - t_3^2) + 2t_2^2 t_3 t_{k-1},$$

$k = 5, 6, \dots$,

und hat damit, sofern $t_2 \neq 0$ ist, eine Rekursionsformel für die Koeffizienten t_k , $k = 5, 6, \dots$. Ist $t_2 = 0$, so erhält man aus (5.6):

$$t_3^2 \left(\sum_{v=3}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (2 - \delta_{v, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}) t_v t_{k-v} \right) = 0,$$

woraus für $k = 6$ $t_3 = 0$ folgt; daraus wiederum aus Gleichung

(z^4) $t_4 = 0$ usw. . Ist also in (5.5) $t_2 = 0$, so ist (5.5) notwendig eine komplexe Gerade. Wir haben somit:

Satz 19. Eine reelle Quadrik Q des G^n vom Typ $H_{n-2,2}$, die nicht komplex 2-dimensional geblättert ist, weist in einem nicht-singulären Punkte $\mathcal{C}_0$ höchstens dann eine nicht-lineare komplex 1-dimensionale Blätterung der Gestalt

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + t_1 z + t_2 \sum_{v=1}^{\infty} t_v z^v$$

auf, wenn $t_2 \neq 0$ ist und die Koeffizienten t_k , $k \geq 5$, sich rekursiv wie folgt berechnen:

$$t_k = \frac{1}{t_2} \left[\sum_{v=2}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (2 - \delta_{v, \left[\frac{k+1}{2}\right]}) t_v t_{k-v} (t_2 t_4 - t_3^2) + 2 t_2^2 t_3 t_{k-1} \right] .$$

Literaturverzeichnis

- [1] Bertini E., Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien 1924.
- [2] Gunning R. C. und Rossi H., Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, London 1965.
- [3] Hua L. K., On the Theory of Automorphic Functions of a Matrix Variable. American Journal of Mathematics 66 (1944), S. 470 - 488.
- [4] Kahle D., Komplex-analytische Blätterung reeller Quadriken im C^3 . Schriftenreihe des Math. Instituts der Univ. Münster, Heft 27, 1963.
- [5] Perlis S., Theory of Matrices. Addison-Wesley Publ. Comp. Massachusetts 1958.
- [6] Sommer F., Analytische Geometrie im C^n . Schriftenreihe des Math. Instituts der Univ. Münster, Heft 11, 1957.
- [7] Sommer F., Komplex-analytische Blätterung reeller Mannigfaltigkeiten im C^n . Math. Ann. Bd. 136 (1958), S. 111 - 133.
- [8] Sommer F., Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen im C^n . Math. Ann. Bd. 137 (1959), S. 392 - 411.
- [9] Sperner E., Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. Bd. 2, Göttingen 1959.

Lebenslauf

Am 30. März 1940 wurde ich, Günther Reinelt, in Hennersdorf/Sud. als Sohn des Bürgerschullehrers Johann Reinelt und dessen Ehefrau Margarete, geb. Gabriel, geboren. Nach der Vertreibung im Jahre 1946 gelangte ich mit meinen Eltern über Heidelberg nach Tittling/Bayr. Wald, wo ich im September 1946 in die Volksschule eintrat. Ab Herbst 1952 besuchte ich das Deutsche Gymnasium in Straubing, an dem ich im Juli 1959 die Reifeprüfung ablegte. Anschließend studierte ich in Würzburg Mathematik und Physik. Nach dem Vorexamen im Herbst 1961 wurde ich wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik der Julius-Maximilians-Universität Würzburg. In den Monaten August bis Oktober 1964 bestand ich die Erste Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen in den Fächern Mathematik und Physik. In der Zeit vom 1. November 1964 bis 1. Oktober 1965 verwaltete ich am Mathematischen Institut der Universität Würzburg die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten. Am 17. Februar 1965 heiratete ich die Studentin der Pädagogischen Hochschule Würzburg, Elfrun Kastl.

Seit Oktober 1965 verwalte ich eine Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Ruhr-Universität Bochum.

Bochum, 26.1.1967

Günther Reinelt

BÖHLER-DRUCK

87 WÜRZBURG, Wirsbergstr. 10

Tel. 54143